Lycée pilote de Bizerte	Test de contrôle n°25(4^{éme}Math)	Prof :M.Ben Ali

Exercice 1:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit ξ la courbe d'équation : $x^2+4y^2-36=0$.

1) a) Montrer que ξ est une ellipse dont on donnera le centre, les sommets et l'excentricité e.

b) Tracer ξ.

2) Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 6 et (C') le cercle de centre O et de rayon 3.

Soit θ un réel. On désigne par P le point de (C) tel que $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OP}}) \equiv \theta\ [2\pi]$ et par P' le point de (C') tel que $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OP'}}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Soit Δ la droite parallèle à $(O, \vec{j})$ passant par P et Δ' la droite parallèle à $(O, \vec{i})$ passant par P'.

Δ et Δ' se coupent en un point M.

a) Vérifier que M a pour coordonnées $(6\cos\theta, 3\sin\theta)$.

b) Montrer que lorsque θ varie dans IR, Le point M reste sur ξ.

c) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à ξ en M.

d) On désigne par N le point d'intersection de la droite parallèle à $(O, \vec{i})$ passant par P et de la droite parallèle à $(O, \vec{j})$ passant par P'.

Montrer que T est perpendiculaire à (ON).

e) Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, construire le point M et la tangente T.

Exercice 2:

Dans la **figure 3** ; dans l'annexe ci-jointe ABCDEFGH est un parallélépipède droit tels que : $AB = AD = 1$ et $AE = 2$.On désigne par M le milieu du segment [DC]. A

1- Montrer que les droites (CE) et (FM) sont sécants en un point I.

2- On désigne par h l'homothétie de centre I qui transforme C en E.

a) Déterminer les images des droites (CD) et (FM) par h. En déduire que $h(M) = F$.

b) Prouver que h est de rapport -2.

3- Soit J le milieu du segment [AE]. On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AD}\right)$

a) Trouver une représentation paramétrique de chacune des droites (MF) et (CE).

b) Déduire que I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

c) Soit $N(1, 0, \frac{1}{2})$. Montrer que $h(N) = H$.

4- a) Calculer l'aire du triangle FEH.

b) Calculer le volume du tétraèdre IFEH. En déduire le volume du tétraèdre IMCN.

5- Soit S l'ensemble des points M(x, y, z) tels que : $x^2+y^2+z^2-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}z+\frac{8}{9}=0$

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon R.

b) Vérifier que $I \in S$.

c) Montrer que S est tangente au plan (ABC) en un point T que l'on précisera.

6- On pose $S' = h(S)$. Montrer que S' est tangente au plan (EFH) en un point T' que l'on précisera.

Exercice 4 :

A /

1) *Soit n un entier naturel non nul et soit g_n la fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *par* $g_n(x) = x - n + \frac{n}{2} Lnx$.

a) *Dresser le tableau de variations de* g_n.

b) *Calculer* $g_1(1)$. *En déduire le signe de* $g_1(x)$ *sur* $]0,+\infty[$.

2) a) *Montrer que pour tout* $n \in IN^*$, *il existe un unique réel* a_n *tel que* $g_n(a_n) = 0$. *Verifier que :* $1 < a_n < e^2$.

b) *Montrer que pour tout* $n \in IN^*$, $\ln(a_n) = 2 - \frac{2}{n} a_n$.

3) a) *Montrer que pour tout* $n \in IN^*$, $g_{n+1}(a_n) = -\frac{a_n}{n}$. *En déduire que la suite* (a_n) *est croissante.*

b) *Montrer que la suite* (a_n) *converge vers un réel L.*

c) *Calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(a_n)$ *et déduire la valeur de L*

B / .

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ *par* $f(x) = \frac{2x - Lnx}{2\sqrt{x}}$.

On note ζ *sa courbe représentative dans un R.O.N* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) *Montrer que f est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et que* $f'(x) = \frac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$.

2) *Dresser le tableau de variations de f puis construire* ζ.

3) *Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe* ζ *et les droites* $y = 0$, $x = 1$ *et* $x = 2$.

a) *En utilisant une integration par parties calculer* $\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

b) *Déduire A.*

C /

3) *Soit* (U_n) la suite *définie sur* IN^* *par* $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} f(1 + \frac{k}{n})$.

1) *Montrer que pour tout entier k tel que* $0 \le k \le n-1$, on a :

$$\frac{1}{n} f(1+\frac{k}{n}) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \le \frac{1}{n} f(1+\frac{k+1}{n}).$$

$x + \frac{k+1}{n} - x + \frac{k}{n} =$

2) *En déduire que :* $U_n - \frac{1}{n} f(2) \le A \le U_n - \frac{1}{n} f(1)$.

3) *En déduire que* (U_n) *est convergente et calculer sa limite.*

$\frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$x - 1 + \frac{\ln x}{2}$

$x^{\frac{1}{2}} \to \frac{2}{3} \cdot x^{3/2}$