Lycée pilote de Bizerte	Test de controle n°22	Prof:M.Benali

Exercice n°1

Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses proposées est exacte .
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie .

1) *Le chiffre des unités de* 9^{2011} *est* :

a) 9 b) 3 c) 1

2) *Soient* a *et* b *et* n *des entiers naturels non nuls tels que* : $a \equiv b \pmod{n}$ *alors on a* :

a) $ab \equiv 0 \pmod{n}$ b) $a+n \equiv b \pmod{n}$ c) $a! \equiv b! \pmod{n}$

3) $\int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 tf'(t)dt =$

a) $f(1)-f(0)$ b) $f(0)$ c) $f(1)$

4) *La valeur moyénne de la fonction qui à* $t \mapsto t\cos t$ *sur l'intervalle* $[0;\pi]$ *est égale à* :

a) π b) $-\dfrac{1}{\pi}$ c) $-\dfrac{2}{\pi}$

Exercice n°2

Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *l'equation* $(E): 12x-7y=3$

1) *Montrer que si* (x,y) *est solution de* (E) *alors* $y \equiv 0 \pmod{3}$.

2) a) *déterminer une solution particuliére de* (E).

b) *Resoudre dans* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *l'equation* (E).

3) *Pour tout entier* n *on considére les entiers* $a=7n+9$ *et* $b=12n+15$.

a) *Vérifier que pour tout entier* n *,le couple* (a,b) *est solution de* (E).

b) *En déduire les valeurs possibles de* $d=a\wedge b$.

c) *Déterminer alors l'ensemble des entiers* n *tels que* $a\wedge b=3$.

Exercice n°3

L'espace ξ *est rapporté à un repére orthonormé direct* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considére les points $A(1,0,0)$; $B(0,0,1)$ *et* $C(1,-1,1)$.

1) a) *Calculer* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ *.En déduire que les points* A,B *et* C *déterminent un plan* P.

b) *Déterminer une equation cartésienne de* P .

2) *Soit* S *l'ensemble des points* $M(x,y,z)$ *de* ξ *tels que* : $x^2+y^2+z^2-2x-2z+1=0$.

a) *Montrer que* S *est une sphére dont on précisera le centre* I *et le rayon* r .

b) *Montrer que* $S\cap P$ *est le cercle circonscrit au triangle* ABC

3) *Calculer le volume du tétrédre* $IABC$.

4) a)*Soit* h *l'application de* ξ *dans lui meme qui à tout point* $M(x,y,z)$ *associe le point* $M'(x',y',z')$

$$\text{tels que : } \begin{cases} x' = 2x-1 \\ y' = 2y-1 \\ z' = 2z-1 \end{cases}$$

a) *Montrer que* h *est une homothétie dont on précisera les coordonnées de son centre* K *et le rapport* :

b) *Déterminer une equation cartésienne de la sphére* $S'=h(S)$.

Exercice n° 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la conique (E) de foyer O, de sommet S (- 1,0) et de directrice associée au foyer O la droite D d'équation : $x = \frac{-5}{2}$.

1)-a- Montrer que l'excentricité e de (E) est égale à $\frac{2}{3}$.

-b- En déduire que (E) est une ellipse d'équation : $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

-c- Donner une équation de la deuxième directrice de (E) et les coordonnées du foyer O' qui lui est associé.

-d- Construire (E).

2) Soit M un point de (E) d'affixe $Z = re^{i\theta}$ où $\theta \in [0, \pi]$ et $r > 0$.

-a- Montrer que $r = \frac{5}{3 - 2\cos\theta}$.

-b- La droite (OM) recoupe l'ellipse (E) en M'. Exprimer $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM'}})$ en fonction de θ.

-c- En déduire que : $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'} = \frac{6}{5}$.

3)-a- Montrer que $MM' = \frac{30}{5 + 4\sin^2\theta}$.

-b- En déduire que MM' est minimale si et seulement si O est le milieu du segment [MM'].

Exercice n° 5

1) Soit g la fonction définie sur] 0,1] par $g(x) = \frac{1}{x} - 1 + Ln\, x$.

Etudier les variations de g . En déduire le signe de g .

2) Soit f la fonction définie sur [0,1] par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{Lnx} \; si \quad x \in]0,1[\\ f(0) = 0 \quad et \quad f(1) = 1 \end{cases}$

a) Montrer que f est continue sur [0,1]

b) Montrer que f est dérivable sur] 0,1[et que $\forall x \in]0,1[$ $f'(x) =$

c) f est-elle dérivable à droite en 0

d) On admet que f est dérivable à gauche en 1 et que $f'_g(1) = \frac{1}{2}$ dresser le tablea

variation de f puis tracer C_f dans un plan orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| =$

3) Soit x un réel de l'intervalle] 0,1] on pose $F(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{f(t)}{t} dt$

Montrer que F est dérivable sur] 0,1] et que $F'(x) = - f(x)$

Calculer F(1) . En déduire que $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$

a) Vérifier que $\frac{f(t)}{t} = \frac{1}{Lnt} - \frac{1}{tLnt}$

b) Montrer que $\forall x \in]0,1[$ on a $\int_{x^2}^{x} \frac{-1}{tLnt} dt = Ln2$

c) Vérifier que $\forall x \in]0,1[$ ... déduire que $0 \leq |\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{Lnt}| \leq$

d) Déduire que lim