Lycée pilote de Bizerte	Test de controle n°13	Prof:M.Benali

Exercice-1- :(03 Points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) - Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit $A(-i)$ et $f : P \to P$

$$M(Z) \mapsto M'(Z') \text{ tel que } Z' = (1-i\sqrt{3})Z + \sqrt{3}$$

On désigne par R la rotation de centre A et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$.

- $f \circ R$ est l'homothétie de centre A et de rapport - 2.

2) - Soit B un point du plan , Δ et Δ' deux droites perpendiculaires en B. On pose $f = S_{\Delta} \circ h_{(B,\frac{1}{2})} \circ S_{\Delta'}$.

- f est l'homothétie de centre B et de rapport $(-\frac{1}{2})$.

3) - Soit F la fonction définie sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = 1$.

Exercice-2- :(05 Points)

Le plan est orienté dans le sens direct. On considère un carré direct ABCD de centre O

Soit P un point variable du segment [BC] distinct de B.

On note Q le point d'intersection des droites (AP) et (CD).

La perpendiculaire Δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

On désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) - a) Déterminer l'image de la droite (BC) par r.

b) Montrer que les triangles ARQ et APS sont des triangles rectangles et isocèles.

2) - On note N le milieu de [PS] et M le milieu de [QR].

Soit f la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a) Déterminer les images respectives de R et P par f.

b) Déterminer le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé du point B.

c) Montrer que les points B, M, N et D sont alignés.

3) - Soit $g = f \circ S_{(AB)}$.

a) Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport et le centre.

b) Construire l'axe de g.

Exercice - 3- :(04 Points)

Soit f la fonction définie sur [-1, +∞[par $f(x) = \sqrt{1+x^3}$.

1) - Justifier que la fonction f admet au moins une primitive sur [-1, +∞[.

2) - Soit F la primitive de f sur [-1, +∞[qui s'annule en 1.

On pose pour tout $n \in IN^*$, $I_n = \int_0^1 x^n F(x)\,dx$.

a) - Calculer $\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$.

b) - En déduire la valeur de I_1.

c) - Montrer que F est strictement croissante sur [-1, +∞[.

d) - En déduire le signe de F(x) pour $x \in [-1.+\infty[$.

e) - Montrer que la suite (I_n) est croissante. En déduire qu'elle est convergente.

f) - Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $\frac{F(0)}{n+1} \leq I_n \leq 0$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice - 4- :(08 Points)

Dans le graphique de l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes C et Γ qui représentent : une fonction f définie et deux fois dérivable sur IR_+ ainsi que sa primitive F.

On admet que C est au dessus de son asymptote la droite d'équation y = -1 et que $A\left(1, \frac{\pi}{2}-1\right) \in \Gamma$

Partie- A-

1) A l'aide d'une lecture graphique

- a- Montrer que C est la courbe de f

- b- Calculer $(F\circ f)'(1)$

- c- Montrer que l'équation $f''(x) = -1$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.

- d- Justifier que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]-1,1]$. Tracer la courbe C' de f^{-1}.

2) On admet que pour tout $x \geq 0$; $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Montrer que pour tout $x \in]-1,1]$, $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}$

3) Soit g la fonction définie sur $[0,\pi[$ par : $g(x) = f^{-1}(\cos x)$.

- a- Vérifier que pour tout $x \in [0,\pi[$, $g(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

- b- Montrer que g est dérivable à droite en 0 et que pour tout $x \in [0,\pi[$, $g'(x) = \frac{1}{1+\cos x}$

4) - a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur IR_+.

- b- Montrer que g^{-1} est dérivable sur IR_+ et que pour tout $x \geq 0$, $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

5) Montrer que l'équation $F(\frac{x}{2}) + \frac{x}{2} = 1$ admet une solution unique a dans $[0,2]$.

Partie- B-

1) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, $g(2x) = \tan(x)$.

2) Pour tout $n \in IN^*$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x.dx$

Montrer que la suite (I_n) est décroissante dont tous les termes sont positifs.

3) - a- Calculer la dérivée de la fonction : $x \mapsto \tan^{n+1}(x)$.

En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

- b- Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

- c- En déduire la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

- d- Exprimer en fonction de n , $T(n) = I_{n+4} - I_n$, $n \in IN^*$.

4) - a- Calculer I_2.

- b- Calculer $T(2) + T(6) + T(10) + \ldots + T(4k-2)$ en fonction de I_2 et I_{4k+2} , $k \in IN^*$.

- c- En déduire la limite de la somme : $S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots - \frac{1}{4k-1} + \frac{1}{4k+1}$ lorsque k tend vers $+\infty$

5) - a- Soit G la primitive sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ de la fonction tangente qui s'annule en 1.

Calculer I_1.

- b- Calculer $T(1) + T(5) + T(9) + \ldots + T(4k-3)$ en fonction de I_1 et I_{4k+1} , $k \in IN^*$.

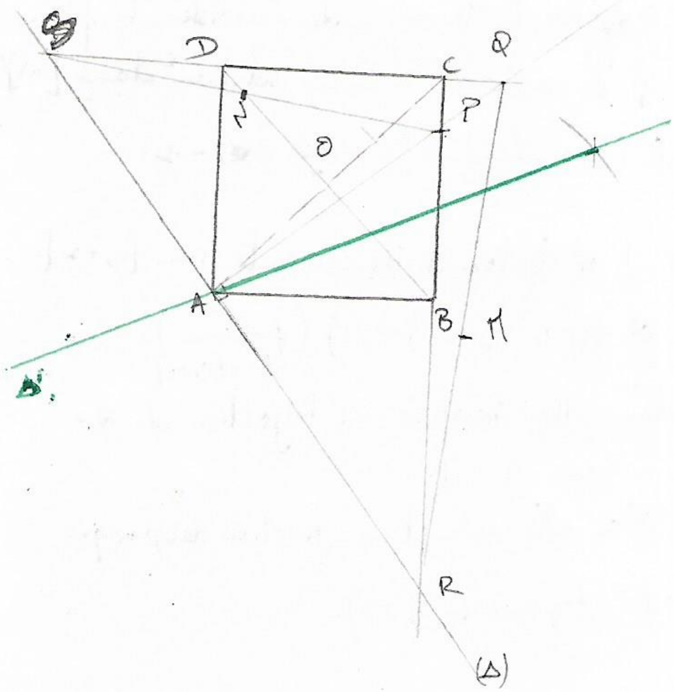
- c- En déduire la limite de la somme : $S' = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

Bon Travail

$\frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n+2}$

I_{2n}

Ex 2)



$r = R_{(A, \frac{\pi}{2})}$.

1) a/ On a ~~r(B) = D car~~

$\left.\begin{array}{l} AB = AD \\ (\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{array}\right\} R(B) = D.$

D'où $r((BC))$ est la perpendiculaire à (BC) passant par $r(B) = D$.

D'où $r((BC)) = (DC)$.

b/ On a $\left.\begin{array}{l} (\Delta) \perp (AP) \\ R \in \Delta \end{array}\right\}$ ~~ARQ rectangle en A.~~

On a $\{R\} = (BC) \cap (\Delta)$.

or $A \in \Delta$ et $r(A)$.

donc $r(\Delta)$ est la perpendiculaire à Δ en A.

D'où $r(\Delta) = (AP)$.

D'où $\{R\} = (BC) \cap \Delta$

$\{r(R)\} = r((BC)) \cap r(\Delta)$

$\{r(R)\} = (DC) \cap$ …

… $r(R) = Q$.

De même $\left.\begin{array}{l} r(A) = A \\ A \in (AP) \end{array}\right\}$ $r((AP))$ est la perp… (AP) en A.

d'où $r((AP)) = \Delta$.

On a $\{P\} = (BC) \cap (AP)$

$\{r(P)\} = r((BC)) \cap r((AP))$

$\{r(P)\} = (CD) \cap \Delta$

$r(P) = S$.

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} AP = AS \\ (\vec{AP}, \vec{AS}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{array}\right\}$ APS rectangle isocèle e…

2) a/ $f = S_{(A, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})}$

Le triangle AQR est rect. isocèle en A

~~…~~ et $M = Q * R$.

D'où $(AM) \perp (MR)$ et $(\vec{AR}, \vec{AM}) = \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$

D'où AMR est rectangle en M.

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{AM}{AR} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow AM = \frac{\sqrt{2}}{2} AR$.

On a alors $\left\{\begin{array}{l} AM = \frac{\sqrt{2}}{2} AR \\ (\vec{AR}, \vec{AM}) = \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \end{array}\right.$

d'où $f(R) = M$.

De même $f(P) = N$. (APN isocèle rect.).

b/ Lorsque $P \in [BC] \setminus \{B\}$.

$N = f(P) \in f([BC] \setminus \{B\})$.

Or on a $\left\{\begin{array}{l} (\vec{AB}, \vec{AO}) = \frac{\pi}{4}\,[2\pi]. \\ \frac{AO}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (ABC rectangle en B).} \end{array}\right.$

$\left.\begin{array}{l} \text{d'où } f(B) = O. \\ \text{De même } f(C) = D. \end{array}\right\}$ $f([BC] \setminus \{B\}) = [OD] \setminus \{O\}$.

$\Rightarrow N \in [OD] \setminus \{O\}$.

On a C, P, B et R alignés.

Donc leurs images $f(C), f(P), f(B)$ et $f(R)$ sont alignés.

…, O et M sont al…

3/ $g = f \circ S_{(AB)}$

a/ g est la composée de deux similitudes l'une direct de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et l'autre de rapport 1 et indirecte.

Donc g est une similitude indirecte de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Or $g(A) = f \circ S_{(AB)}(A)$

$= f(A)$

$= A$.

Donc g de centre A.

b/ $g(B) = f \circ S_{(AB)}(B)$

$= f(B)$

$= O$.

On pose Δ' l'axe de g.

Δ' porte la bissectrice intérieure de $(\vec{AB}, \vec{AO})$.

Ex 4

1/ a/ On suppose que Γ est la courbe de f.

donc $\mathscr{C}$ " " " F.

f est positive sur $[1, 2]$.

donc F croissante sur $[1, 2]$.

or $\mathscr{C}$ est décroissante sur $[1, 2]$.

Contradiction

donc $\mathscr{C}$ est la courbe de f.

" Γ ———— F.

b/ $(F \circ f)'(1) = \cancel{f'(1) \times F'(f)}$

$= f'(1) \cdot F'(f(1))$

$= (-1) \cdot (f \circ f)(1)$

$= (-1) \times f(0) = (-1) \times 1$

$= -1$.

c/ f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}+$.

Donc sa fonction dérivée f' est dérivable sur $[0, 1]$.

D'après le Théorème des accroissements finis il existe au moins une solution c dans $[0$

$f''(c) = \frac{f'(1) - f'(0)}{1 - 0} = \frac{-1}{1} = -1$.

d/ f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

et $f([0, +\infty[) =]-1, 1]$ (f continue sur $[0, +\infty[$).

donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}+$ vers $]-1, 1]$.

D'où elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]-1, 1]$.

e/ pour $x \geq 0$, $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

On pose $\begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in]-1, 1] \\ x \in \mathbb{R}+ \end{cases}$

$f^{-1}(y) = x$ ssi $f(x) = y$.

" $y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$

ssi $y + y \cdot x^2 - 1 + x^2 = 0$.

$x^2(y + 1) = 1 - y$; $x \geq 0$.

$x^{\cancel{2}} = \sqrt{\frac{1 - y}{1 + y}}$

$x = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{1 + x}$

$f^{-1}(y) = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{1 + y}$.

Donc pour $x \in]-1, 1]$, $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 + y}$.

3/ $g : [0, \pi[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto f^{-1}(\cos x) = g(x)$.

a/ pour $x \in [0, \pi[$; $g(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{1 + c}$

$= \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{1 + \cos x}$, $\sin x$

b/ $\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{1+\cos x}}{x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

Car $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$.

donc g est dérivable à droite en 0.

et $g'_d(0) = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+\cos 0}$.

~~Pour $x \in]0,\pi[$~~,

la fonction $x \mapsto \sin x$ dérivable sur $]0,\pi[$.

" " $x \mapsto 1+\cos x$ " et non nulle sur $]0,\pi[$.

donc " " $x \longmapsto \frac{\sin x}{1+\cos x}$ " sur $]0,\pi[$.

d'où g est dérivable sur $]0,\pi[$.

Pour $x \in]0,\pi[$, $g'(x) = \frac{(\cos x)(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$

ssi $g'(x) = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$

" $g'(x) = \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}$, $1+\cos x \neq 0$.

" $g'(x) = \frac{1}{(1+\cos x)}$

D'où pour $x \in [0,\pi[$,

$g'(x) = \frac{1}{1+\cos x}$.

4/a/ Pour $x \in [0,\pi[$, $g'(x) = \frac{1}{1+\cos x} > 0$.

g est strictement monotone sur $[0,\pi[$.

Donc elle est bijective de $[0,\pi[$ sur $g([0,\pi[)$.

g est continue et strictement croissante.

donc $g([0,\pi[) = [g(0), \lim_{\pi} g[$

$= [0, +\infty[$

Car $\lim_{x\to\pi^-} \frac{\sin x}{1+\cos x} = \cancel{\ldots}$.

$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\sqrt{(1+\cos x)(1-\cos x)}}{1+\cos x}$

$= \lim_{x\to\pi^-} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$; $\lim \ldots$

$= +\infty$.

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $\mathbb{R}_+$.

b/ g est dérivable sur $[0,\pi[$.

Pour $x \in [0,\pi[$, $g'(x) = \frac{1}{1+\cos x} \neq 0$

Donc (g^{-1}) est dérivable sur $g([0,\pi[) = \mathbb{R}_+$

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$

On pose $\begin{cases} g^{-1}(x) = y \\ x \in \mathbb{R}_+ \\ y \in [0,\pi[\end{cases}$

alors ~~$g(y) = x$~~.

$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \boxed{1+\cos y}$

Or $g(y) = x$ ssi $\frac{\sin y}{1+\cos y} = x$.

$x^2 = \frac{1-\cos^2 y}{(1+\cos y)^2}$

$x^2 = \frac{1-\cos y}{1+\cos y}$.

$x^2 + x^2 \cdot \cos y - 1 + \cos y = 0$

$\cos y(1+x^2) = 1-x^2$

$\boxed{\cos y = \frac{1-x^2}{1+x^2}}$

D'où $(g^{-1})'(x) = 1+\cos y$

$(g^{-1})'(x) = 1 + \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$(g^{-1})'(x) = \frac{1+x^2+1-x^2}{1+x^2}$

$(g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

5) Soit (E) : $F\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} = 1$.

On pose $h : [0,2] \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto h(x) = F\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} = \ldots$

~~On pose $y = \frac{x}{2}$, $x \in [0,2]$~~

~~donc $y \in [0,1]$~~.

$(E) \iff F\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} = 1$. ssi

La fonction $x \mapsto \frac{x}{2}$ continue et dérivable sur $[0,2]$

$x \mapsto F(x)$ " " $[0,1]$.

Pour $x \in [0,2]$, $\frac{x}{2} \in [0,1]$.

Donc h continue sur $[0,2]$.

$h(0) = F(0) + \frac{0}{2} = 0 < 1$

$h(2) = F(1) + 1 \geq 1$ car $F > 0$ sur $[0,1]$.

$h'(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{1}{2} > 0$

car $f > 0$ sur $[0,1]$

donc h strictement croissante sur $[0,2]$

D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, $h(x) = 1$ admet une solution unique dans $[0,2]$.

D'où l'équation $F\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} = 1$ ...

Partie B

1) Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$

$$g(2x) = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2\sin x \cdot \cos x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\cancel{2}\sin x \cdot \cancel{\cos x}}{\cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{2}\cos^{\cancel{2}} x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

2/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x (\tan x - 1) \, dx.$$

Or pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $0 \leq \tan x \leq 1$

donc $\tan x - 1 \leq 0$

et $\tan^n x \geq 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$\tan^n x (\tan x - 1) \leq 0$ et $0 \leq \frac{\pi}{4}$.

D'où $\int_0^{\pi/4} \tan^n x (\tan x ...$

$\Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$

Par suite, (I_n) est décroissante.

* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$.

or $\tan^n x \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

D'où $I_n \geq 0$.

3/ $\left(\tan^{n+1}(x)\right)' = (n+1)(\tan^2 x + 1) \tan^n x$.

pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

* $I_{n+2} + I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (\tan^2 x + 1) \, dx$.

pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} (n+1) \cdot \tan^n x (\tan^2 x + 1)$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \left[\tan^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{n+1}.$$

b/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+2} \geq 0$.

$I_n \leq I_n + I_{n+2}$

$I_n \leq \frac{1}{n+2} \cdot (1)$

et on a : $I_n \leq I_{n+2}$ ((I_n) décroissante)

$2I_n \geq I_n + I_{n+2}$

$2I_n \geq \frac{1}{n+1}$

$I_n \geq \frac{1}{2(n+1)}$ (2)

D'où

$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{\cancel{2}(n+1)}$ pour $n \in$ ...

c/ Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2(n+1)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

alors $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

d/ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T(n) = I_{n+4} - I_n$

$$T(n) = (I_{n+4} + I_{n+2}) - (I_{n+2} + I_n)$$

$$= \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}.$$

4/ a/ $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx = \left[\tan x - x\right]_0^{\pi/4}$

$= 1 - \frac{\pi}{4}$.

b/ $T(2) + T(6) + \dots + T(4k-2)$

$= I_6 - I_2 + I_{10} - I_6 + I_{14} - I_{10} + \dots$

$... - I_2$.

c/ On a :

$T(2)+T(6)+\dots+T(4k-2)$

$= \sum_{m=1}^{k} T(4m-2)$

$= \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{4m-2+3} - \frac{1}{4m-2+1}$

$= \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{4m+1} - \frac{1}{4m-1}.$

$S = 1 + \sum_{m=1}^{k}\left(\frac{1}{4m+1} - \frac{1}{4m-1}\right)$

$S = 1 + \left(T(2)+T(6)+\dots+T(4k-2)\right)$

$= 1 + I_{4k+2} - I_2.$

$\lim_{k\to+\infty} S = \lim_{k\to+\infty} 1 - I_2 + I_{4k+2}$; $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$

$= 1 - I_2$

$= 1 - 1 + \frac{\pi}{4}$

$= \frac{\pi}{4}.$

5/a/ G la primitive de $\tan x$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ /

$G(1) = 0.$

$I_1 = \int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = \left[G(x)\right]_0^{\pi/4}$

$= G\left(\frac{\pi}{4}\right) - G(0)$

b/ $T(1) = I_5 - I_1$

$T(5) = I_9 - I_5$

$T(9) = I_{13} - I_9$

$\vdots$

$T(4k-3) = I_{4k+1} - I_{4k-3}$; $k \in \mathbb{N}^*.$

$T(1)+T(5)+\dots+T(4k-3) = I_{4k+1} - I_1.$

c/ $T(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$

$T(5) = \frac{1}{8} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right).$

$\vdots$

$T(4k-3) = \frac{1}{4k} - \frac{1}{4k-2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$

$\sum_{m=1}^{k} T(4m-3) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{k}\left(\frac{1}{2m-1} - \dots\right)\right)$

$I_{4k+1} - I_1 = -\frac{1}{2} \cdot S'$

$S' = 2I_1 - 2I_{4k+1}$

$\lim_{k\to+\infty} S' = \lim_{k\to+\infty} 2(I_1 - I_{4k+1})$

$= 2I_1$

$=$