Lycée pilote de Tunis	Sujet de révision 4- 2020	Terminales Maths
Mr Ben Regaya. A	+Éléments de Corrections	www.ben-regaya.net

Exercice 1

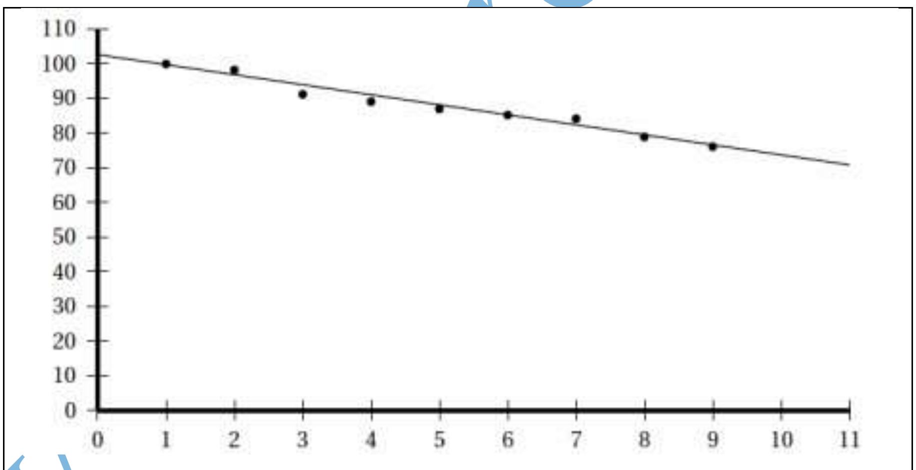
La Caisse Nationale de l'Assurance Maladie (CNAM) publie, chaque année, des statistiques sur les accidents du travail en France. Celles-ci permettent d'obtenir divers indicateurs, notamment l'indice de fréquence (nombre moyen d'accidents du travail avec arrêt pour 1000 salariés).

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice de fréquence pour le secteur du BTP (Bâtiment et Travaux Publics) en France, au cours des années 2001 à 2009 :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Indice de fréquence: y_i	100,3	98,9	91,6	89,5	87,6	85,4	84,0	79,9	76,0

1. Premier ajustement

Grâce à un logiciel, un élève a obtenu le nuage de points représentant la série statistique (x_i, y_i) et, par la méthode des moindres carrés, la droite d'ajustement de y en x dont une équation est $y = -2{,}89\,x + 102{,}59$ (les coefficients sont arrondis à 0,01).



a) En supposant que cet ajustement affine est valable jusqu'en 2012, déterminer une estimation de l'indice de fréquence en l'année 2012.

b) Quel serait le pourcentage d'évolution entre 2007 et 2012 de l'indice de fréquence selon ce modèle ? On arrondira le résultat à 10^{-2}.

2. Deuxième ajustement

Un autre élève envisage un ajustement exponentiel de la série statistique (x_i, y_i) .On pose $z_i = \ln y_i$.

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous (les valeurs de z_i seront arrondies à 10^{-3}).

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$z_i = \ln y_i$	4,608	4 ,594	4,517						

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de z en x sous la forme $z = a\,x + b$, les coefficients a et b étant arrondis à 10^{-4}.

En déduire une expression de y en fonction de x sous la forme $y = ke^{-0,0328x}$, k étant une constante arrondie à 10^{-1} près.

3. La stratégie européenne de santé au travail a fixé comme objectif une réduction de 25% de l'indice de fréquence entre 2007 et 2012. Peut-on prévoir d'atteindre cet objectif selon les deux ajustements précédents, que l'on suppose valables jusqu'en 2012 ?

Exercice2

Partie *I*

Dans cette partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3

On considère la fonction g_n définie sur $]0,+\infty[$ par $g_n(x) = nx + 2lnx$.

1. Dresser le tableau de variations de g_n.
2. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $\sqrt{x} \succ lnx$.
3. a) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution notée α_n, puis montrer que $\frac{1}{n} \prec \alpha_n \prec \frac{1}{\sqrt{n}}$.

   b) En déduire la limite de la suite (α_n).

Partie *II*

A- Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt[3]{x}\,e^{-x}$.

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On prend 3 cm pour unité

1. Etudier la dérivabilité de f à droite de zéro puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.
3. a) Montrer que pour tout réel x appartenant à $]0,+\infty[$, $f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x)$.

   b) Dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer (C). On prendra $f\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,5$.

B- On pose $I = \left[\frac{1}{3},1\right]$.

1. a) Montrer que $f(I) \subset I$.

   b) Montrer que $\forall x \in I, |f'(x)| \le \frac{2}{3}$.

   c) Montrer que $[x = \alpha_3 \Leftrightarrow (x \succ 0 \text{ } et \text{ } f(x) = x)]$, où α_3 est la solution de l'équation (Cf. Partie I).
2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et pour entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a) Montrer que pour entier naturel n, $u_n \in I$.

   b) Montrer que pour entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha_3| \le \frac{2}{3}|u_n - \alpha_3|$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

d) Montrer que la suite est convergente et donner sa limite.

Partie *III*

Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x)=\int_x^{8x} f(t)\,dt$.

1. a) Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$.

   b) Donner l'expression de $F'(x)$ pour tout x appartenant à $[0,+\infty[$ et en déduire le sens de variations de *F*.

2. a) Montrer que pour tout x appartenant à $[0,+\infty[$, on a $0 \leq F(x) \leq 2f(x)\left(1-e^{-7x}\right)$.

   b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

   c) Dresser le tableau de variations de *F*.

Exercice 3

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f(0)=0$ et si $x \succ 0$, $f(x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$. (C) est la courbe de *f* dans un repère orthonormé du plan.

1. a) Montrer que *f* est continue à droite en 0.

   b) Etudier la dérivabilité de *f* à droite en 0. Donner l'équation de la demi-tangente à (C) au point *O*.

2. a) Montrer que *f* est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$.

   b) Déduire les variations de *f* sur $[0,+\infty[$.

   c) Déduire que *f* admet une fonction réciproque *g* définie sur $[0,1[$.

   d) Tracer les courbes (C) et (C') de *g*.

3. Soit x un réel de $]0,1]$.

   a) Calculer en fonction de *x*, le réel $G(x)=\int_x^1 t\,f'(t)\,dt$.

   b) On considère la fonction *F* définie sur $]0,1]$ par : $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$.

   Exprimer $F(x)$ en fonction de $G(x)$. En déduire que $F(x)=\frac{1}{e}-x\,e^{-\frac{1}{x}}$.

4. Soit α un réel de $]0,1[$ et $A(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=\alpha$ et $x=1$.

   a) Calculer $A(\alpha)$ et $\lim\limits_{\alpha\to0^+} A(\alpha)$.

   b) En déduire l'aire du domaine plan limité par (C), (C') et les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=1$.

Exercice4 « Répondre par vrai-faux » . Justifier.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=1$

2. Si $u(x)=8^x$, alors sa dérivée est $u'(x)=8^{x-1}$.

3. L'ensemble des couples d'entiers (x,y) solutions de l'équation $12x-5y=3$ est l'ensemble des couples $(4+10k, 9+24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ le point A d'affixe $2-i$ et B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On note I le milieu de $[AB]$.
   La similitude directe S de centre A qui transforme I en O a pour écriture complexe $z'=(1+i)z-1-2i$.
5. Pour tout réels a et b strictement positifs $\int_1^{ab}\frac{1}{t}dt=\int_1^{a}\frac{1}{t}dt+\int_1^{b}\frac{1}{t}dt$.

Exercice5

n est un entier naturel non nul. Soit f_n la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f_n(x)=\frac{\sqrt{ln\,x}}{x^n}$.On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. a) Etudier la dérivabilité de f_n à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   b) Dresser le tableau de variation de f_n.
   c) Etudier la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}) puis tracer (C_1) et (C_2).
2. Soit a un réel de $]1,+\infty[$. Calculer une mesure de l'aire $I(a)$ de la partie du plan limité par la courbe (C_1), la droite des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$.
3. On pose $t_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{ln\left(1+\frac{k}{2n}\right)}}{k+2n}$.
   a) Montrer que pour tout entier $k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$, on a :
   $$\frac{1}{2n}f_1\left(1+\frac{k}{2n}\right)\le\int_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{k+1}{2n}}f_1(x)dx\le\frac{1}{2n}f_1\left(1+\frac{k+1}{2n}\right)$$
   b) En déduire que $t_n-\frac{1}{2n}f_1\left(\frac{3}{2}\right)\le I\left(\frac{3}{2}\right)\le t_n$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n$.

Exercice 6

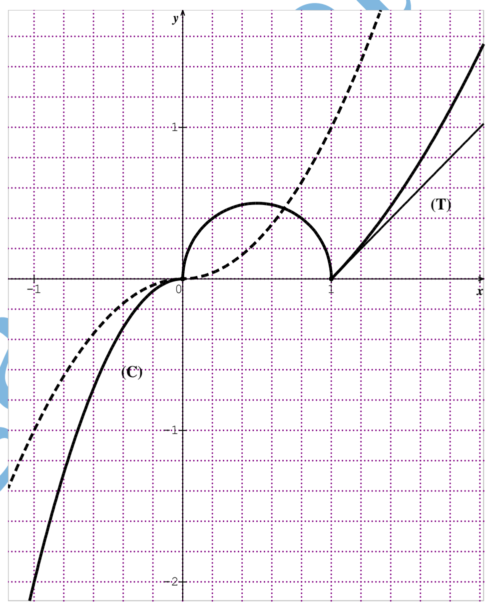
On considère la suite (u_n) définie pour tout naturel non nul n par $u_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2 et elle est convergente.
2. Montrer que pour tout réel $x\succ 0$, $\frac{1}{x+1}\le ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\le\frac{1}{x}$.
3. Déduire de ce qui précède que, pour tout naturel non nul n, $u_n\le ln3\le u_n+\frac{2}{3n}$.
4. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Exercice7

Dans le graphique ci-dessous on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ en gras la courbe (C) d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. On sait que la restriction de la courbe (C) à l'intervalle $[0,1]$ est le demi-cercle de diamètre $[OI]$ et que la demi-tangente (T) à (C) a droite en 1 à pour équation $y = x-1$.

En pointillé on a représenté la courbe de la fonction g définie par : $g(x)=\begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x \prec 0 \end{cases}$



1. Préciser le signe de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on pose $F(x)=\int_0^{lnx} f(t)dt$

   a) Calculer $F(1)$.

   b) Donner une interprétation graphique de $F(e)$ puis prouver que $F(e)=\frac{\pi}{8}$.
3. a) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x \succ 0$, $F'(x)=\frac{f(lnx)}{x}$.

   b) Par une simple lecture graphique prouver que pour tout $t \geq 1$ on a : $t-1 \leq f(t) \leq t^2$.

   En déduire que pour tout $x \geq e$ on a :

   $\frac{1}{2}(lnx)^2 - lnx \leq \int_1^{lnx} f(t)dt \leq \frac{1}{3}(lnx)^3$

   c) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$.

   a) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, on a $F(x) \geq -\frac{1}{3}(lnx)^3$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$.

   b) Dresser le tableau de variation de F. Donner l'allure de la courbe de F dans un nouveau repère.

Exercice8

1. Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E): 97x-299y=81$.

   a) Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x,y) tels que $x=299k+7$ et $y=97k+2$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

   b) soit (x,y) une solution de (E). Quelles sont les valeurs possibles de $x\wedge y$?

   c) Montrer que $(299k+7)\wedge(97k+2)=(k-10)\wedge 81$. En déduire les couples (x,y) solutions de (E) tels que $x\wedge y=81$.

2. a et c deux chiffres non nuls. On suppose que le nombre à quatre chiffres $X = a4c4$ et $Y = c4a4$ sont tels que $Y = Xq + 2$ où $q \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $202q - 201 \equiv 0\,(mod 5)$.

b) En déduire que $q = 3$.

c) Montrer que le couple (c,a) est solution de (E).

d) Déterminer alors X et Y.

Exercice 9

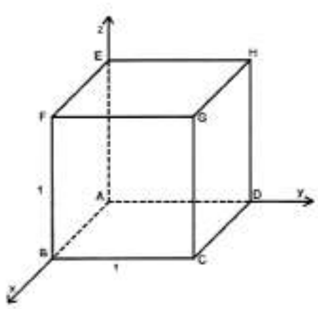
Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1. On désigne par P le centre de gravité du triangle HGF et Q le centre de gravité du triangle FBG et on muni l'espace du repère orthonormé direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

1. a) Donner une représentation paramétrique de la droite (BH).

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ACF) est $-x + y + z = 0$

c) Déterminer les points W de la droite (BH) tel que le volume de tétraèdre $ACFW$ est égale à $\frac{11}{6}$.

2. Soit K le milieu de $[FG]$ et h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{3}$.



a) Montrer que $h(H) = P$ et $h(B) = Q$

b) Donner l'expression analytique de h.

3. Soit le plan (R): $-x + y + z - \frac{1}{3} = 0$

a) Montrer que (R) est l'image du plan (ACF) par h.

b) Vérifier que (BH) est perpendiculaire à (ACF) en un point N que l'on déterminera les coordonnées.

En déduire que (R) est perpendiculaire à (PQ) en un point N' que l'on déterminera les coordonnées.

c) Donner une équation cartésienne de la sphère S tangente aux plans (R) et (ACF) et dont le centre appartient à la droite (NN').

Lycée pilote de Tunis	Sujet de révision 4- 2020	Terminales Maths
Mr Ben Regaya. A	Eléments de Corrections	www.ben-regaya.net

Exercice 1

1. Premier ajustement

a) En supposant que cet ajustement affine est valable jusqu'en 2012, une estimation de l'indice de fréquence en l'année 2012 est : $y_{12} = -2,89 \times 12 + 102,59 = 67,91$

b) Pourcentage d'évolution entre 2007 et 2012 de l'indice de fréquence selon ce modèle :

$t = \dfrac{67,91 - 84}{84} \times 100 \approx -19,15\,\%$

2. **Deuxième ajustement**

Un autre élève envisage un ajustement exponentiel de la série statistique

On pose $z_i = \ln y_i$.

a)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$z_i = \ln y_i$	4,608	4 ,594	4,517	4,494	4,473	4,447	4,431	4,381	4,331

b) À l'aide de la calculatrice, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de z en x est :
$z = -0,0328x + 4,6392$

c) $z = \ln y \Leftrightarrow y = e^z \Leftrightarrow y = 103,5 \times e^{-0,0328x}$

3. La stratégie européenne de santé au travail a fixé comme objectif une réduction de 25% de l'indice de fréquence entre 2007 et 2012.
Nous venons de voir qu'en utilisant l'ajustement affine, il y avait une réduction de 19,15% entre 2007 et 2012.
L'objectif ne serait donc pas atteint.

En utilisant l'ajustement exponentiel, l'indice de fréquence en 2012 est : $y'_{12} = 103,5 \times e^{-0,0328 \times 12} = 69,8236$

Le pourcentage d'évolution entre 2007 et 2012 de l'indice de fréquence selon ce dernier modèle est :

$t' = \dfrac{67,8236 - 84}{84} \times 100 \approx -16,88\,\%$. L'objectif n'est pas atteint.

Exercice 2

Partie I

1. g_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'_n(x) = n + \dfrac{2}{x} \succ 0$, de plus $\lim\limits_{x \to 0^+} g_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty$

   Le tableau de variations de g_n est ainsi :

x	0		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	
$g_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. On pose $d(x) = \sqrt{x} - \ln x$ et on va démontrer que $d(x) \succ 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

   d est dérivable sur $]0,+\infty[$ somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et $d'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{2x}$.

d admet un minimum en $x=4$, donc pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, on a

$d(x)\geq d(4)=2(1-ln2)=2(lne-ln2)=2ln\left(\frac{e}{2}\right)\succ 0$ car $\frac{e}{2}\succ 1$, donc $\sqrt{x}\succ lnx$ pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$.

3. a) g_n est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ donc continue et elle est strictement croissante sur cet intervalle donc elle réalise une bijection de $\left]0,+\infty\right[$ sur $g_n\left\langle\left]0,+\infty\right[\right\rangle=\mathbb{R}$.

   $o\in g_n\left\langle\left]0,+\infty\right[\right\rangle$ donc l'équation $g_n(x)=0$ admet dans $\left]0,+\infty\right[$ une unique solution notée α_n.

   De plus $g_n\left(\frac{1}{n}\right)=1+2ln\left(\frac{1}{n}\right)=1-2ln(n)=ln\left(\frac{e}{n^2}\right)$, donc $\forall n\geq 3\ g_n\left(\frac{1}{n}\right)\prec 0$.

   Par ailleurs $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n}+2ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n}-ln(n)\succ 0$ d'après la question 2.

   On en déduit que $g_n\left(\frac{1}{n}\right)\prec 0\prec g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, c'est-à-dire $g_n\left(\frac{1}{n}\right)\prec g_n(\alpha_n)\prec g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et comme g_n est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$, alors $\frac{1}{n}\prec\alpha_n\prec\frac{1}{\sqrt{n}}$.

   b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ par le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$.

Partie II

A-

1. Pour $x\succ 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{x\sqrt[3]{x}\,e^{-x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}\,e^{-x}}$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=+\infty$, cela implique que f n'est pas dérivable à droite de zéro et que (C) admet une demi tangente verticale d'équation $\begin{cases}x=0\\ y\geq 0\end{cases}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{\sqrt[3]{x}}}=0$ en effet $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\sqrt[3]{x}}=+\infty$ résultat de cours. donc (C) admet la droite d'équation $y=0$ comme asymptote.

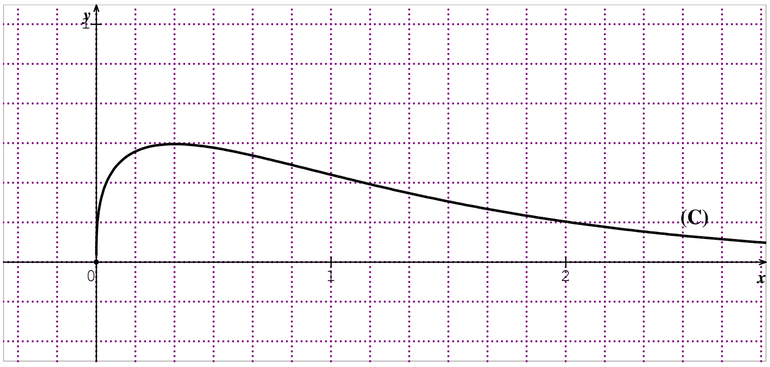
3. a) f est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}e^{-x}-x^{\frac{1}{3}}e^{-x}=\left(\frac{1}{3x}-1\right)x^{\frac{1}{3}}e^{-x}=\left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x)$.

   Pour tout x appartenant à $\left[0,+\infty\right[$, $f(x)=\sqrt[3]{x}\,e^{-x}$ est positive, le signe de f' ne dépend que du signe de $\frac{1-3x}{3x}$.

   b)

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+		-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$0,5$	$\searrow$	0

4.



B-

1. a) f est strictement décroissante et elle est continue donc $f(I)=\left[f(1),f\left(\frac{1}{3}\right)\right]$.

De plus $f(1)=\frac{1}{e}\succ\frac{1}{3}$ et $f(1)\in I$.

Et $f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}e^{-\left(\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}\times\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{(3e)^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3e}}$, or $3e\succ1\Rightarrow\sqrt[3]{3e}\succ\sqrt[3]{1}=1\Rightarrow\frac{1}{\sqrt[3]{3e}}\prec1\Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right)\prec1$

et $f\left(\frac{1}{3}\right)\in I$.

Donc $\frac{1}{3}\prec f(1)\prec f\left(\frac{1}{3}\right)\prec1$ et au final $f(I)\subset I$.

b) On a : $f'(x)=\left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x)$, soit $|f'(x)|=\left|\left(\frac{1-3x}{3x}\right)\right||f(x)|$, d'après le tableau de variation de f, on sait que $f(x)\le f\left(\frac{1}{3}\right)\approx0,5\prec1\ \ \forall x\in I$.

D'où $|f'(x)|\le\left|\left(\frac{1-3x}{3x}\right)\right|$, or $\forall x\in I,\left|\frac{1-3x}{3x}\right|=\frac{3x-1}{3x}=1-\frac{1}{3x}$.

$\frac{1}{3}\le x\le1\Leftrightarrow1\le3x\le3\Leftrightarrow\frac{1}{3}\le\frac{1}{3x}\le1\Rightarrow1-\frac{1}{3x}\le1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

Au final, on a bien $\forall x\in I,|f'(x)|\le\frac{2}{3}$.

c) On a $f(x)=x\ et\ x\succ0\Leftrightarrow\sqrt[3]{x}\,e^{-x}=x\ et\ x\succ0\Leftrightarrow e^{-x}=x^{\frac{2}{3}}$ et $x\succ0\Leftrightarrow-x=\frac{2}{3}lnx$ et $x\succ0$

$\Leftrightarrow3x+2lnx=0$ et $x\succ0\Leftrightarrow g_3(x)=0$ et $x\succ0\Leftrightarrow x=\alpha_3$.

2. a) Pour cela, on utilise un raisonnement par récurrence.

On a $u_0=\frac{1}{3}\in I$, on suppose que $u_n\in I$ et on s'intéresse à u_{n+1}.

Comme $f(I)\subset I$, alors $f(u_n)\in I$, c'est à dire $u_{n+1}=f(u_n)\in I$.

On sait que $\frac{1}{3}\prec\alpha_3\prec\frac{1}{\sqrt{3}}$ donc $\alpha_3\in I$ et aussi pour entier naturel n, $u_n\in I$.

f étant dérivable sur I et pour tout réel x de I, $|f'(x)|\le\frac{2}{3}$, d'après le corollaire du théorème des accroissements finis $|f(u_n)-f(\alpha_3)|\le\frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|$ ou encore $|u_{n+1}-\alpha_3|\le\frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|$.

c) Raisonnons par récurrence : Pour $n=0$ $|u_0-\alpha_3|\le 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ donc vraie

Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons $|u_n-\alpha_3|\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ on a donc $\frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$ et comme $|u_{n+1}-\alpha_3|\le\frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|$

alors $|u_{n+1}-\alpha_3|\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$ ce qu'il faut prouver.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $|u_n-\alpha_3|\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

d) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=0$ car $-1\prec\frac{2}{3}\prec 1$ et donc par le théorème de comparaison la suite (u_n) est convergente et sa limite est α_3.

Partie III

1) a) Soit $G(y)=\int_0^y f(t)\,dt$, f est continue sur $[0,+\infty[$ donc G est dérivable sur $[0,+\infty[$ et on $F(x)=G(8x)-G(x)$ on a donc F est dérivable sur $[0,+\infty[$.

b) On a : pour tout réel $x\ge 0$ $F'(x)=8\times G'(8x)-G'(x)=8\times f(8x)-f(x)$

$=8\sqrt[3]{8x}\,e^{-8x}-\sqrt[3]{x}\,e^{-x}=\left(8\sqrt[3]{8}\,e^{-7x}-1\right)\sqrt[3]{x}\,e^{-x}=\left(16e^{-7x}-1\right)\sqrt[3]{x}\,e^{-x}$.

Le Signe de $F'(x)$ sur $[0,+\infty[$ est celui de $16e^{-7x}-1$

$16e^{-7x}-1\ge 0\Leftrightarrow e^{-7x}\ge\frac{1}{16}\Leftrightarrow -7x\ge -ln(16)\Leftrightarrow x\le\frac{4}{7}ln(2)$

Donc, F est strictement croissante sur $\left[0,\frac{4}{7}ln(2)\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{4}{7}ln(2),+\infty\right[$.

2. a) Pour tout x appartenant à $[0,+\infty[$, on a $F(x)\ge 0$ du fait que f soit positive ou nulle sur $[0,+\infty[$.

$F(x)=\int_x^{8x}\sqrt[3]{t}\,e^{-t}\,dt$

t étant compris entre x et $8x$ pour $x\ge 0$ alors par croissance de la fonction racine cubique sur $[0,+\infty[$, on a :

$\sqrt[3]{t}\le\sqrt[3]{8x}$ et comme $e^{-x}\succ 0$ alors $\sqrt[3]{t}\,e^{-x}\le\sqrt[3]{8x}\,e^{-x}$ et la continuité des fonctions permet d'écrire :

$F(x)\le\sqrt[3]{8x}\int_x^{8x}e^{-t}\,dt=2\sqrt[3]{x}\left[-e^{-t}\right]_x^{8x}=2e^{-x}\sqrt[3]{x}\left(1-e^{-7x}\right)=2f(x)\left(1-e^{-7x}\right)$.

Finalement, pour tout réel x appartenant à $[0,+\infty[$, on a : $0\le F(x)\le 2f(x)\left(1-e^{-7x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}1-e^{-7x}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}2f(x)\left(1-e^{-7x}\right)=0$ et donc par le théorème de comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$.

x	0	$\frac{4}{7}\ln(2)$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	0 ↗	$F\left(\frac{4}{7}\ln(2)\right)$	↘ 0

Exercice3

1. a) Pour $x\succ 0$, $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{x}}-\left(-\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ donc par composée $\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = 0$ et on a $\lim\limits_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0 = f(0)$ et *f* est continue à droite en 0.

b) Pour $x \succ 0$, $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{x+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} = (x+1)\left(-\frac{1}{x}\right)^2 e^{-\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$ donc par composée $\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)^2 e^{-\frac{1}{x}} = 0$ et par produit $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x} = 0$ donc *f* est dérivable à droite en 0 et $f_d^{'}(0) = 0$. La demi-tangente à (C) au point o à pour équation : $\begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$.

2. a) La fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x}$ est rationnel avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $\left]0,+\infty\right[$ donc dérivable sur cet intervalle.

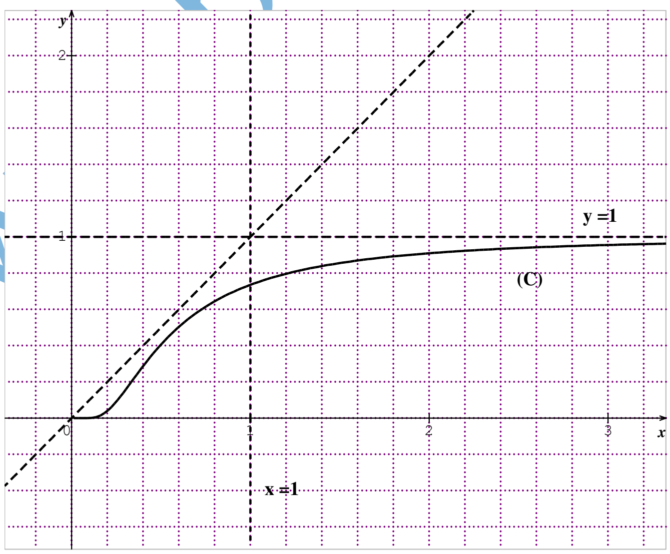
La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est rationnel avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $\left]0,+\infty\right[$ donc dérivable sur cet intervalle et comme la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors la fonction composée $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$. *f* est produit de fonctions dérivables sur $\left]0,+\infty\right[$ donc dérivable sur cet intervalle.

Pour $x \succ 0$, $f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} = \left(-1+1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x}}$.

b) On a pour $x \succ 0$, $f'(x) \succ 0$ donc *f* est strictement croissante sur $\left[0,+\infty\right[$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = 1$ donc $f\left\langle\left[0,+\infty\right[\right\rangle = \left[0,1\right[$. Dresser le tableau de variation de *f*.

c) *f* est continue et elle est strictement croissante sur $\left[0,+\infty\right[$ donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image $\left[0,1\right[$. Donc *f* admet une fonction réciproque *g* définie sur $\left[0,1\right[$.

d) Je donne (C) construire (C').



3. a) $G(x) = \int_x^1 t\, f'(t)dt = \int_x^1 \frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}\,dt = \left[e^{-\frac{1}{t}}\right]_x^1 = \frac{1}{e} - e^{-\frac{1}{x}}$.

b) Intégrons par partie $F(x)=\int_x^1 1\times f(t)\,dt$.

On posons $u'(t)=1\Rightarrow u(t)=t$. Par le théorème d'intégration par parties :

$F(x)=\left[t\,f(t)\right]_x^1-\int_x^1 t\,f'(t)\,dt=f(1)-x\,f(x)-G(x)=\frac{2}{e}-x\,f(x)-G(x)$. On a donc

$F(x)=\left[t\,f(t)\right]_x^1-\int_x^1 t\,f'(t)\,dt=f(1)-x\,f(x)-G(x)=\frac{2}{e}-x\,f(x)-G(x)$. On vient d'exprimer $F(x)$ en fonction de $G(x)$.

Déduction : On a $F(x)=\frac{2}{e}-x\,f(x)-G(x)\Leftrightarrow F(x)=\frac{2}{e}-(x+1)e^{-\frac{1}{x}}-\frac{1}{e}+e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}-xe^{-\frac{1}{x}}$ c'est le résultat souhaité.

4. a) Sur $]0,1]$ la fonction f est strictement positive donc $A(\alpha)=\int_\alpha^1 f(t)\,dt=F(\alpha)=\frac{1}{e}-\alpha\,e^{-\frac{1}{\alpha}}$.

$\alpha^2\left(-\frac{1}{\alpha}\right)e^{-\frac{1}{\alpha}}$ et par composée $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)e^{-\frac{1}{\alpha}}=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ et donc $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}A(\alpha)=\frac{1}{e}$.

b) L'aire A' demandée est l'aire du carré unité du quel en retranche $2\times\frac{1}{e}$. Ce qui donne $A'=1-\frac{2}{e}$.

Exercice 4

1. $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}$. Soit $f(x)=e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}\times 2=2$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ et

$=\lim\limits_{n\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}=e^2$. f a pour limite e^2 il en est de même pour la suite u.

proposition fausse.

2. $u(x)=8^x=e^{x\ln 8}$ u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=(\ln 8)e^{x\ln 8}=(\ln 8)\times 8^x$. **proposition fausse**.

3. Le couple $(4;9)$ correspondant à $k=0$ n'est pas solution . **proposition fausse**.

4. B l'image de A par la rotation de centre O signifie $z_B=i\times z_A=1+2i$. Le milieu I de $[AB]$ a pour affixe

$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{1+2i+2-i}{2}=\frac{3+i}{2}$.

La similitude directe de centre A qui transforme I en O a pour rapport

$k=\frac{OA}{AI}=\frac{|z_A|}{|z_I-z_A|}=\frac{\sqrt{5}}{\left|-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right|}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}}}=\sqrt{2}$ et pour angle $\theta\equiv\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AO}\right)[2\pi]$. Or

$$\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AO}\right)\equiv\arg\left(\frac{-z_A}{z_I-z_A}\right)[2\pi]\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AO}\right)\equiv\arg\left(\frac{-2+i}{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i}\right)[2\pi]\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AO}\right)\equiv\arg\left(\frac{-2+i}{-1+3i}\right)[2\pi]$$

Le complexe $\frac{-2+i}{-1+3i}=\frac{5+5i}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ et donc $\theta\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

L'écriture complexe de S est de la forme $z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + b = (1+i)z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$ et comme $S(I) = O$ alors

$0 = (1+i)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right) + b \Leftrightarrow b + 1 + 2i = 0 \Leftrightarrow b = -1-2i$. **Proposition correcte**.

5. $\int_1^{ab} \frac{1}{t}dt = ln(ab) = ln(a) + ln(b) = \int_1^{a} \frac{1}{t}dt + \int_1^{b} \frac{1}{t}dt$. **Proposition correcte**.

Exercice5

1. a) Pour $x \succ 1$; $\frac{f_n(x)}{x-1} = \frac{\sqrt{lnx}}{x^n(x-1)} = \frac{lnx}{x-1} \times \frac{1}{x^n\sqrt{lnx}}$ .Comme $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{lnx}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x^n\sqrt{lnx}} = +\infty$, alors

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f_n(x)}{x-1} = +\infty$

f_n n'est pas dérivable à droite en 1.la demi-tangente à C_n au point d'abscisse 1 a pour équation $\begin{cases} x = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

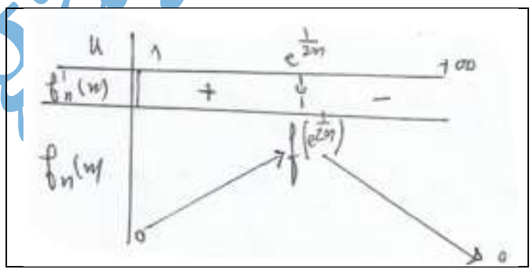
b) f_n est pas dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x \succ 1,\quad f_n'(x) = \frac{x^{n-1}(1-2nlnx)}{2x^{2n}\sqrt{lnx}}$.

Le signe de $f_n'(x)$ est celui de $1-2n\,lnx$. Or $1-2n\,lnx \geq 0 \Leftrightarrow lnx \leq \frac{1}{2n} \Leftrightarrow x \leq e^{\frac{1}{2n}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^n}\frac{1}{\sqrt{lnx}} = 0$ et

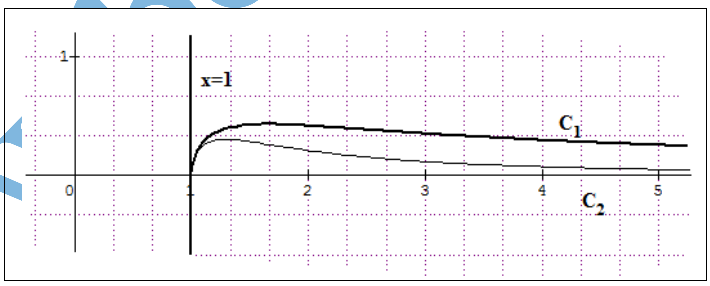
$f\left(e^{\frac{1}{2n}}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2n}}}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{e2n}}$.

Ce qui donne le tableau de variation ci-contre:



c) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\sqrt{lnx}}{x^n}\left(\frac{1-x}{x}\right) \leq 0$; $(x \leq 1)$. Donc C_n est au dessus de C_{n+1} .

d)



2. $a \in]1,+\infty[$

$\forall x \geq 1;\ f_1(x) \geq 0$ donc $I(a) = \int_1^a f_1(x)dx = \int_1^a \frac{\sqrt{lnx}}{x}dx = \int_1^a \frac{1}{x}\sqrt{lnx}dx$. Or l'expression $\frac{1}{x}\sqrt{lnx}$ est de la forme

$u'\sqrt{u}$ donc $I(a) = \left[\frac{2}{3}lnx\sqrt{lnx}\right]_1^a = \frac{2}{3}lna\sqrt{lna}$

3. On a $k \in \{0,1,2,....,n-1\}$ donc $0 \le k \le n-1 \Leftrightarrow 1 \le k+1 \le n \Leftrightarrow \frac{1}{2n}+1 \le 1+\frac{k+1}{2n} \le \frac{3}{2}$. Or $\sqrt{e} \succ \frac{3}{2}$ et f_1 est strictement croissante sur $\left[1,\sqrt{e}\right]$ donc si $0 \le 1+\frac{k}{2n} \le x \le 1+\frac{1+k}{2n} \le \sqrt{e}$ alors

$$f\left(1+\frac{k}{2n}\right) \le f(x) \le f\left(1+\frac{k+11}{2n}\right)$$

f_1 étant continue sur $[1,+\infty[$ donc d'après le théorème de la moyenne

$$\left(1+\frac{k+1}{2n}-1-\frac{k}{2n}\right)f_1\left(1+\frac{k}{2n}\right) \le \int_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{k+1}{2n}} f(t)dt \le \left(1+\frac{k+1}{2n}-1-\frac{k}{2n}\right)f_1\left(1+\frac{k+1}{2n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2n}f_1\left(1+\frac{k}{2n}\right) \le \int_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{k+1}{2n}} f(t)dt \le \frac{1}{2n}f_1\left(1+\frac{k+1}{2n}\right)$$

Or $t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{ln\left(1+\frac{k}{2n}\right)}}{k+2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n} f_1\left(1+\frac{k}{2n}\right)$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k;\ 0 \le k \le n-1$; $\frac{1}{2n}f_1\left(1+\frac{k}{2n}\right) \le \int_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{k+1}{2n}} f(t)dt \le \frac{1}{2n}f_1\left(1+\frac{k+1}{2n}\right)$

Par sommation entre 0 et $n-1$, on aura $\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f_1\left(1+\frac{k}{2n}\right) \le \sum_{k=0}^{n-1}\int_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{k+1}{2n}} f(t)dt \le \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f_1\left(1+\frac{k+1}{2n}\right)$ et

d'après la relation de Chasles pour le calcul intégral on obtient finalement $t_n - \frac{1}{2n}f_1\left(\frac{3}{2}\right) \le I\left(\frac{3}{2}\right) \le t_n$.

La double inégalité $t_n - \frac{1}{2n}f_1\left(\frac{3}{2}\right) \le I\left(\frac{3}{2}\right) \le t_n$ s'écrit aussi $I\left(\frac{3}{2}\right) \le t_n \le \frac{1}{2n}f_1\left(\frac{3}{2}\right) + I\left(\frac{3}{2}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}f_1\left(\frac{3}{2}\right) = 0$. Donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = I\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}ln\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{ln\left(\frac{3}{2}\right)}$.

Exercice6

1. On a : $1 \le k \le 2n \Leftrightarrow 1+n \le n+k \le 3n \Leftrightarrow \frac{1}{3n} \le \frac{1}{n+k} \le \frac{1}{n+1}$ et par sommation k allant de 1 à $2n$, on obtient

$$\frac{2n}{3n} \le \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k} \le \frac{2n}{n+1}\ \frac{2}{3} \le \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k} \le 2\frac{n}{n+1} \le 2$$. Donc la suite u est majorée par 2.

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{2n+2}\frac{1}{n+1+k} = \frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}\quad u_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n}$$

$$u_{n+1}-u_n = -\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3} = -\frac{3}{3n+3}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}$$

$= -\frac{2}{3n+3}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2} \ge 0$ en effet $3n+1 \prec 3n+3$ et $3n+2 \prec 3n+3$ donc la suite u est croissante et comme elle est majorée par 2 donc elle converge.

2. On a pour $x \succ 0$ et $x \le t \le x+1$, $\frac{1}{x+1} \le \frac{1}{t} \le \frac{1}{x+1}$.

   La fonction inverse étant continue sur $\left]0,+\infty\right[$, la positivité de l'intégrale permet d'écrire

   $\int_x^{x+1}\frac{1}{x+1}dt \le \int_x^{x+1}\frac{1}{t}dt \le \int_x^{x+1}\frac{1}{x+1}dt$ ou encore : $x \succ 0,\ \frac{1}{x+1} \le ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \le \frac{1}{x}$.

3. La double inégalité précédente écrite pour différentes valeurs de x donne :

$$x=n;\ \frac{1}{n+1}\le ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\le\frac{1}{n}$$

$$x=n+1;\ \frac{1}{n+2}\le ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\le\frac{1}{n+1}$$

$$\vdots$$

$$x=3n-1;\ \frac{1}{3n}\le ln\left(\frac{3n}{3n-1}\right)\le\frac{1}{3n-1}$$

Par sommation, on aura : $u_n\le ln3\le u_n-\frac{1}{3n}+\frac{1}{n}=u_n+\frac{2}{3n}$

4. La double inégalité précédente, s'écrit aussi $0\le ln3-u_n\le\frac{2}{3n}$.

   Le théorème de comparaison permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=ln3$.

Exercice 7

1. $f(x)\ge 0$ sur $[0,1]$,négative ailleurs.

2. **a)** $F(1)=\int_0^0 f(t)dt=0$.

   b) $F(e)=\int_0^1 f(t)dt$ .C'est l'aire du domaine limité par (C) l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=1$. Or la restriction de la courbe (C) à l'intervalle $[0,1]$ est le demi-cercle de diamètre $[OI]$.Donc $F(e)=\frac{\pi r^2}{2}=\frac{\pi}{8}$.

3. a) Soit pour x réel $G(x)=\int_0^x f(t)dt$.

   On sait que f est continue sur ℝ, donc G est dérivable sur ℝ et $\forall x\in\mathbb{R}\ G'x)=f(x)$

   De plus $F(x)=G(lnx)$.

   La fonction ln étant dérivable sur $]0,+\infty[$ et a valeurs dans ℝ alors F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty[$,

   $F'(x)=G'(lnx)\times\frac{1}{x}=\frac{f(lnx)}{x}$.

   b) Par une lecture graphique, on remarque la courbe (C) est comprise sur $[1,+\infty[$ entre la demi droite T et la courbe de g. Donc pour tout $t\ge 1$ on a : $t-1\le f(t)\le t^2$.

   Pour $x\ge e$ on a , $lnx\ge 1$ et donc vu la continuité des trois fonctions précédentes, on peut utiliser la positivité de l'intégrale et écrire $\int_1^{lnx}(t-1)dt\le\int_1^{lnx}f(t)\,dt\le\int_1^{lnx}t^2dt$

   Ou encore :

   $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(lnx)^2-lnx\le\int_1^{lnx}f(t)dt\le\frac{1}{3}(lnx)^3-\frac{1}{3}$ qu'on peut toujours écrire

   $\frac{1}{2}(lnx)^2-lnx\le\int_1^{lnx}f(t)dt\le\frac{1}{3}(lnx)^3$.

   c) Remarquons que $F(x)=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^{lnx}f(t)dt\Rightarrow F(x)=F(e)+\int_1^{lnx}f(t)dt$.

   Ainsi $\frac{1}{2}(lnx)^2-lnx-\frac{\pi}{8}\le F(x)\le\frac{1}{3}(lnx)^2-\frac{\pi}{8}$.

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}(lnx)^2-lnx=\lim\limits_{x\to+\infty}lnx\left(\frac{1}{2}lnx-1\right)=+\infty$

   Alors par comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$.

Vérifier de même que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0$.

Tenir compte du signe de *ln* sur $]0,+\infty[$ et achever votre exercice.

Exercice 8

1. On a $97\wedge 299=1$ donc l'équation admet des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

   aussi $97\times 7-299\times 2=81$ donc le couple $(7,2)$ est une solution particulière de cette équation.

   Résolution de l'équation (E) :

   Si (x,y) est un couple solution de (E) alors $97\times x-299\times y=97\times 7-299\times 2$

   $\Leftrightarrow 97(x-7)=299(y-2)$ (1)

   On a 299 divise $97(x-7)$ et $97\wedge 299=1$ d'après le lemme de Gauss 299 divise $x-7$ et donc il existe $k\in\mathbb{Z}$

   tel que $x-7=299k$. On remplace $x-7$ dans (1) on obtient $97\times 299k=299(y-2)$ ce qui donne

   $y-2=97k$, $k\in\mathbb{Z}$.

   Apres vérification on peut conclure que l'ensemble des solutions de (E) sont les couples (x,y) avec

   $x=7+299k$ et $y=2+97k$, $k\in\mathbb{Z}$.

   b) Soit (x,y) est un couple solution de (E) et $d=x\wedge y$ alors d divise $97\times x-299\times y=81$ donc d est un

   diviseur de $81=3^4$.

   Or les diviseurs de 81 sont 1, 3, 9, 27, 81 donc d prend l'une ou l'autre de ces 5 valeurs.

   c) passant par l'algorithme d'Euclide et rappelons que dans $\mathbb{Z}$, si $a=bq+r$ alors $a\wedge b=b\wedge r$.

   $299k+7=3(97k+2)+8k+1$

   $97k+2=12(8k+1)+k-10$

   $8k+1=8\times(k-10)+81$

   On voit donc que $(299k+7)\wedge(97k+2)=(k-10)\wedge 81$.

   Déduction :

   on a vu que $x\wedge y=(k-10)\wedge 81$. Ainsi $x\wedge y=81\Leftrightarrow 81$ est un diviseur de $k-10\Leftrightarrow\exists\, p\in\mathbb{Z}$ tel que

   $k=10+81p$ dans ce cas $x=299(10+81p)+7=2997+24219p$ et

   $y=97(10+81p)+2=972+7857p$

   Donc les couples (x,y) solution de (E) avec $x\wedge y=81$ sont :

   $x=2997+24219p$ et $y=972+7857p$, $p\in\mathbb{Z}$.

2. a) En base décimal y s'écrit $y=10^3c+4\times 10^2+10a+4=10^3c+10a+404$ et

   $x=10^3\times a+4\times 10^2+10\times c+4=10^3\times a+10\times c+404$

   Or $y=xq+2,\ q\in\mathbb{N}\Leftrightarrow y=q\left(10^3\times a+10\times c+404\right)+2$

On aura donc $q\left(10^3\times a+10\times c+404\right)+2=10^3c+10a+404$

et par différence $10^3\left(c-aq\right)+10\left(a-cq\right)+402-404q=0$ et donc modulo 5 : $402-404q\equiv 0\left(mod5\right)$

$\Leftrightarrow 2\times\left(201-202q\right)\equiv 0\left(mod5\right)$ et comme $2\wedge 5=1$ d'après le lemme de Gauss $201-202q\equiv 0\left(mod5\right)$

ou encore $202q-201\equiv 0\left(mod5\right)$ c'est le résultat.

b) On a : $202q-201\equiv 0\left(mod5\right)$ (1)

Or $202\equiv 2\left(mod5\right)$ et $201\equiv 1\left(mod5\right)$. L'égalité (1) devient : $2q-1\equiv 0\left(mod5\right)\Rightarrow 2q+4\equiv 0\left(mod5\right)$

$\Leftrightarrow 2\left(q+2\right)\equiv 0\left(mod5\right)$ et $2\wedge 5=1$ d'après le lemme de Gauss $q+2\equiv 0\left(mod5\right)\Leftrightarrow q\equiv -2\left(mod5\right)$ et

$q\in\mathbb{N}$ donc $q\in\left\{3,8,11,...\right\}$.

Or q est un chiffre si non $y=xq+2\succ 10^4$ donc $q\in\left\{3,8\right\}$.

$q\neq 8$ car $x=10^3\times a+10\times c+404\succ 10^3+404\Leftrightarrow 8x\succ 8\times 10^3+8\times 404\succ 10^4$. Ainsi $q=3$.

c) On a $Y=3X+2=3\times\left(10^3\times a+10\times c+404\right)+2$ et $Y=10^3c+10a+404$ donc

$3\times\left(10^3\times a+10\times c+404\right)+2=10^3c+10a+404\Leftrightarrow 10^3\left(c-3a\right)+10\left(a-3c\right)=810$

$\Leftrightarrow 100\left(c-3a\right)+\left(a-3c\right)=81\Leftrightarrow 97c-299a=81$ et donc le couple $\left(c,a\right)$ est solution de $\left(E\right)$.

On en déduit que $c=7$ et $a=2$.

Finalement $X=2474$ et $Y=7424$.

Exercice 9

1. a) Les composantes du vecteur $\overrightarrow{BH}$ sont $\left(-1,1,1\right)$ donc une représentation paramétrique de la droite (*BH*) est

donnée par : $\begin{cases}x=1-\alpha\\ y=\alpha \qquad \alpha\in\mathbb{R}\\ z=\alpha\end{cases}$

b) Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AF}$ sont $\left(1,-1,-1\right)$ et A est point de ce plan donc $\left(ACF\right)$:
$x-y-z=0$.

c) W est un point de la droite (*BH*) et tel que le volume de tétraèdre *ACFW* est égale à $\dfrac{11}{6}$ donc

$\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AF}\right).\overrightarrow{AW}\right|=\dfrac{11}{6}\Leftrightarrow\left|\left(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AF}\right).\overrightarrow{AW}\right|=11$. Or $W\left(1-\alpha,\alpha,\alpha\right)$ donc cela revient à résoudre

$\left|1-3\alpha\right|=11\Leftrightarrow\alpha=-\dfrac{10}{3}$ *ou* $\alpha=4$ et par conséquent deux points …

2. Soit *K* le milieu de [*FG*] et *h* l'homothétie de centre *K* et de rapport $\dfrac{1}{3}$.

a) *P* est le centre de gravité de *HGF* et *Q* est le centre de gravité de *FBG*, donc $\overrightarrow{KP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{KH}$ et $\overrightarrow{KQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{KB}$

ce qui donne $h\left(H\right)=P$ et $h\left(B\right)=Q$.

b) $h(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x'=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \\ y'=\frac{1}{3}y+\frac{1}{3} \\ z'=\frac{1}{3}z+\frac{2}{3} \end{cases}$

3. a) Soit le plan (R) : $-x+y+z-\frac{1}{3}=0$

(R) et (ACF) ont même vecteur normal donc (R) // (ACF)

Le point a est point de (ACF) et $h(A)=A'\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \in (R)$ donc l'image du plan (ACF) par h est le plan (R).

$\overrightarrow{BH}$ est normal au plan (ACF) donc (BH) est perpendiculaire à (ACF).

Soit N le point d'intersection de (BH) avec (ACF) les coordonnées de N satisfait :

$$\begin{cases} x=1-\alpha \\ y=\alpha \\ z=\alpha \\ x-y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\frac{1}{3} \Rightarrow N\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

On a (BH) est perpendiculaire à (ACF) en un point N et h conserve l'orthogonalité donc
L'image par h de (BH) est perpendiculaire à l'image par h de (ACF) en $N'=h(N)$ soit encore $(PQ)\perp(R)$ au point $N'\left(\frac{8}{9},\frac{4}{9},\frac{7}{9}\right)$

c) S est la sphère tangente aux plans (R) et (ACF) et dont le centre appartient à la droite (NN')

Soit $I(a,b,c)$ le centre de la sphère.

On a $d(I,(ACF))=d(I,(R)) \Rightarrow \frac{|a-b-c|}{\sqrt{3}}=\frac{\left|a-b-c+\frac{1}{3}\right|}{\sqrt{3}}$

$a-b-c=a-b-c+\frac{1}{3}$ équation impossible

ou bien $a-b-c=-a+b+c-\frac{1}{3} \Rightarrow 2a-2b-2c+\frac{1}{3}=0$

De plus le point I est un point de la droite (NN') donc $\begin{cases} a=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}t \\ b=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}t \\ c=\frac{1}{3}+\frac{4}{9}t \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{4}{3}+\frac{4}{9}t-\frac{2}{3}-\frac{2}{9}t-\frac{2}{3}-\frac{8}{9}t=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2} \Rightarrow I\left(\frac{7}{9},\frac{7}{18},\frac{5}{9}\right)$

Remarquer que I est le milieu de $[NN']$

Soit R le rayon de la sphère, donc $R=d\left(I,\left(ACF\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{18}$ et par suite une équation cartésienne de S est :

$\left(x-\frac{7}{9}\right)^2+\left(y-\frac{7}{18}\right)^2+\left(z-\frac{5}{9}\right)^2=\frac{1}{108}$.