Sujet de Révision N°4

PROF: M .B.ALI

Exercice 1 : (QCM)

1) Soit dans la plan rapporté au repère orthonormé direct A et B d'affixes respectives i et 2i. L'ensemble des points d'affixes z tel que $\frac{z-2i}{z-i}$ est réel est :

a) le cercle de diamètre [AB] privé de A **b)** la droite (AB) privée de A **c)** le segment [AB] privé de A

2) La valeur de l'intégrale $I = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{x\ln x}.dx$ est :

a) $-\ln 2$ **b)** $\ln\sqrt{e}$ **c)** $\ln 2$

3) S est l'application du plan dans lui-même qui a tout point M(z) associe le oint M'(z') tel que z' = (1-i)z + 2

Soit A(-2i) et r la rotation de centre A et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$. On pose f = ros alors :

a) f est une similitude indirecte **b)** f est l'homothétie h(A,-$\sqrt{2}$) **c)** $S^{-1} \circ f$ est une translation.

Exercice 2 :

1)a) Déterminer selon les entiers n le reste modulo 17 de 4^n.

b) Montrer que $15^{18} \equiv 1[19]$.

c) Déterminer les restes de 2010 respectivement modulo 19 et modulo 17.

d) Montrer alors que $2010^{144} - 1$ est divisible respectivement par 17 et par 19.

e) En déduire que $(2010)^{145} - 72$ est divisible par 323.

2) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) :17x+19y=10.

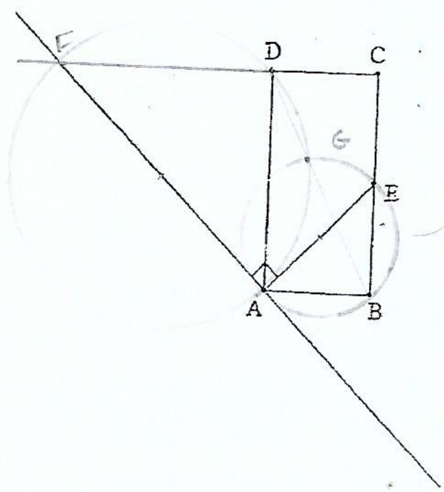
a) Déterminer une solution particulière de 17x+19y=1.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E).

c) Déduire les solutions de l'équation (E') : 170x+19y=10 puis trouver tous les couples d'entiers (x,y) solutions de (E') tels que $|10x + y| \leq 10$.

Exercice 3 :

On donne un rectangle $ABCD$ tel que $AD = 2AB$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.



Le point E désigne le milieu du segment $[BC]$ et Δ la droite perpendiculaire à (AE) en A.

1) La droite Δ coupe la droite (CD) en F. Montrer que le triangle ADF est rectangle isocèle.

2) Soit f la similitude directe telle que $f(B) = D$ et $f(E) = F$.

a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de f.

b) Justifier que A est le centre de f.

3) Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABE.

a) Déterminer et construire le cercle (Γ'), image de (Γ) par f.

b) Le cercle (Γ') recoupe le cercle (Γ) en G. Montrer que les points B, D et G sont alignés.

4) Soit $g = f o S_{(AB)}$.

a) Déterminer $g(A)$ et $g(B)$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

c) Soit (Γ'') l'image de (Γ') par g. Montrer que la droite (AE) est une tangente commune à (Γ')

Exercice 4 :

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK})$

Soient les points suivants $A(1,0,1)$; $B(1,1,1)$; $C(1,1,0)$; $D(0,1,1)$ et Ω le milieu de $[AB]$.

1) a) Déterminer $\overrightarrow{AO}\wedge\overrightarrow{AC}$. En déduire que A,O et C déterminent un plan P dont on donnera une équation.

b) Montrer que la droite (ID) est perpendiculaire à P en un point E que l'on précisera.

2) Soit h l'application de l'espace qui à tout point M associe le point M' tel que $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{AM'}=\vec{0}$.

a) Montrer que h est une homothétie de centre Ω dont on précisera le rapport.

b) Soit G et G' les centres de gravité respectifs des triangles ABD et ABI. Montrer que $h(D)=G$ et que $h(I)=G'$ puis vérifier que $G'\in P$

c) Soit $P'=h(P)$, montrer que P' est perpendiculaire à la droite (GG') en un point E' dont on précisera les coordonnées.

3) Soit S la sphère tangente aux plans P et P' et dont le centre est un point de la droite (GG').

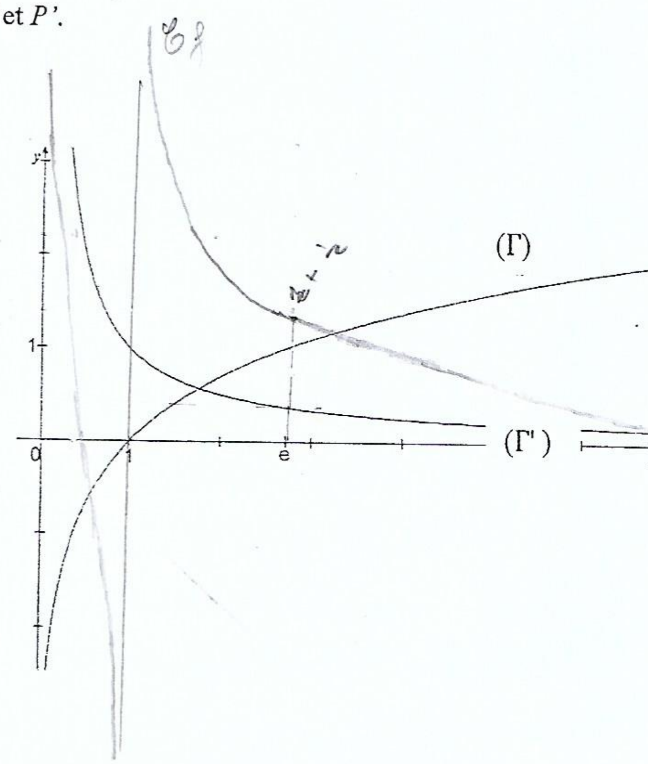
a) Déterminer les points de contact de S avec les plans P et P'.

b) En déduire une équation cartésienne de S.

Exercice 5 :

On a représenté dans l'annexe ci-contre les courbes Γ et Γ' des fonctions $x\mapsto \ln x$ et $x\mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$.

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ par : $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}$.



I) 1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe $(O,\vec{i})$ sur $]0,1[$ en un seul point d'abscisse $\alpha\in]0,5,0,6[$ et vérifier que $\ln\alpha=-\alpha$.

2) Construire à l'aide de Γ et Γ' les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses e et $\frac{1}{e}$ et placer α sur $(O,\vec{i})$ puis tracer $\mathscr{C}_f$.

3) Soit g la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=2f(x^2)$. On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe.

a) Vérifier que pour tout $x\in]1,+\infty[$, $f(x)-g(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$.

b) En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ puis tracer $\mathscr{C}_g$ sur $]1,+\infty[$.

c) Soit $x\in[2,+\infty[$. On désigne par M et N les points respectifs de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x. Pour quelle valeur de x la distance MN est-elle maximale ?

4) Calculer la mesure de l'aire du domaine limité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites $x=2$ et $x=e$.

II) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $V_n(x)=\int_x^{\frac{1}{e}}\frac{1}{(\ln t)^n}.dt$, $x\in]0,\frac{1}{e}]$. On pose $U_n=\lim_{x\to 0^+}V_n(x)$.

1) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n\geq 1$, $V_n(x)=nV_{n+1}(x)-\frac{x}{(\ln x)^n}+\frac{(-1)^n}{e}$.

En déduire que pour tout $n\geq 1$, $U_n=nU_{n+1}+\frac{(-1)^n}{e}$.

2) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in]0,\frac{1}{e}]$, $|V_n(x)|\leq\frac{1}{e}$.

b) En déduire de ce qui précède que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Sujet 4

Ex 2

1) a/

n	1	2	3	4
4^n	4	16	64	256
$\equiv \dots (\text{mod } 17)$	4	-1	-4	1

Si $n \equiv 1 (\text{mod } 4)$; $4^n \equiv 4 (\text{mod } 17)$

$n \equiv 2 (\text{mod } 4)$; $4^n \equiv 16 (\text{mod } 17)$

$n \equiv 3 (\text{mod } 4)$; $4^n \equiv 13 (\text{mod } 17)$

$n \equiv 0 (\text{mod } 4)$; $4^n \equiv 1 (\text{mod } 17)$

b/ 19 est un nombre premier qui ne divise pas 15.

D'après le petit théorème de Fermat :

$15^{18} \equiv 1 (\text{mod } 19)$.

c/ $2010 = 105 \times 19 + 15$

donc $2010 \equiv 15 (\text{mod } 19)$.

et $2010 = 118 \times 17 + 4$

donc $2010 \equiv 4 (\text{mod } 17)$.

d/ On a $2010 \equiv 4 (\text{mod } 17)$.

donc $2010^{144} \equiv 4^{144} (\text{mod } 17)$.

Comme $144 \equiv 0 (\text{mod } 4)$.

alors $4^{144} \equiv 1 (\text{mod } 17)$

" $2010^{144} \equiv 1 (\text{mod } 17)$

" $2010^{144} - 1 \equiv 0 (\text{mod } 17)$.

donc $17 \mid 2010^{144} - 1$.

Or $2010 \equiv 15 (\text{mod } 19)$

$2010^{144} \equiv 15^{144} (\text{mod } 19)$

Or $5^{18} \equiv 1 (\text{mod } 19)$

$(5^{18})^{8} \equiv$ ...

D'où $2010^{144} - 1 \equiv 0 (\text{mod } 19)$

" $19 \mid 2010^{144} - 1$.

e/ On a $\left.\begin{array}{l} 17 \mid 2010^{144} - 1 \\ 19 \mid 2010^{144} - 1 \\ 17 \wedge 19 = 1 \end{array}\right\}$

donc $2010^{144} - 1 \equiv 0 (\text{mod } 17 \times$ ...

$2010^{144} \equiv 1 (\text{mod } 323)$

$2010^{145} \equiv 2010 (\text{mod } 323)$

$2010^{145} \equiv 72 (\text{mod } 323)$

$2010^{145} - 72 \equiv 0 (\text{mod } 32$...

donc $323 \mid 2010^{145} - 72$.

2) a/ Soit (E') : $17x + 19y = 1$.

On a $17 \times (-10) + 19 \times 9$

$= -170 + 171$

$= 1$

donc $(-10, 9)$ solution particulière de (E').

(ou et $(9, -8)$)

b/ On pose (x, y) solution de (E).

On a $17 \times 9 + 17 \times (-8) = 1$

sig $17 \times 90 + 17 \times (-80) = 10$

donc $(90, -80)$ solution particulière (E).

On a : $17x + 19y = 17 \times 90 + 17 \times ($...

$17(x - 90) = 19(-y - 80)$.

$\left.\begin{array}{l} 19 \mid 17(x-90) \\ 19 \wedge 17 = 1 \end{array}\right\}$ $19 \mid x - 90$.

donc $x = 19k + 90$; $k \in \mathbb{Z}$.

donc $17(\cancel{19}k + \cancel{90} - \cancel{90}) = \cancel{19}(-y - 8$...

$17k = -y - 80$

$y = -17k -$ ...

... $-17k - 80$

c/ On a (E') : $170x + 19y = 10$.

sig $17\times(10x) + 19y = 10$.

On pose $x' = 10x$

sig $17x' + 19y = 10$.

ssi (x', y) solution de (E)

donc $\begin{cases} x' = 19k + 90 \\ y = -17k - 80 \end{cases}$; $k \in \mathbb{Z}$.

$\begin{cases} 10x = 19k + 90 \\ y = -17k - 80 \end{cases}$; $k \in \mathbb{Z}$.

On a $\left.\begin{array}{l} 10 \mid 19k+90 \\ 10 \mid 90 \end{array}\right\}$ $10 \mid 19k$ or $10 \wedge 19 = 1$

D'où $10 \mid k$.

donc $k = 10k'$; $k' \in \mathbb{Z}$.

D'où $\begin{cases} 10x = 19\times 10k' + 90 \\ y = -80 - 17\times 10k' \end{cases}$

sig $\begin{cases} x = 19k' + 9 \\ y = -80 - 170k' \end{cases}$

Réciproquement...

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(19k'+9, -80-170k') ; k' \in \mathbb{Z}\}$

Les couples d'entiers solutions de (E') / $|10x + y| \leq 10$

$|190k' + 90 - 80 - 170k'| \leq 10$

$|20k' + 10| \leq 10$

$|2k' + 1| \leq 1$

$-1 \leq 2k' + 1 \leq 1$

$-2 \leq 2k' \leq 0$

$-1 \leq k' \leq 0$

$k' \in \{0, -1\}$

$(x, y) \in \{(-10, 90)(9, -80)\}$

Ce sont alors les seules solutions de (E') / $|10x + y| \leq 10$

Ex 3)

On a $(AD) \perp (CD)$ et $F \in (CD)$

donc $(AD) \perp (CF)$

ssi ADF rectangle en D.

Or $BE = \frac{1}{2} BC$

$BE = BA$. et $(EB) \perp (A$

donc BEA rectangle isocèle en

d'où $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

ssi $(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A}}$

$\equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\ [2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

D'où $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}}) + (\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}})$

$\equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

$(\widehat{\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FA}}) \equiv \frac{\pi}{2} - (\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}})\ [2\pi$

$\equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$\equiv (\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}})\ [2\pi]$

Donc ADF est isocèle en D.

D'où ADF rectangle isocèle en D

2) f similitude directe /

$f(B) = D$, $f(E) = F$.

a/ Soit k son rapport.

$k = \frac{FD}{BE}$

$= \frac{AD}{\frac{1}{2}AD}$

$= 2$.

Soit θ une mesure de son angle

$\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DF}})\ [2\pi]$

$\equiv \pi + (\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CF}})\ [2$

$\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

b/ On pose Ω centre de f.

On a $f(B) = D$

donc $\begin{cases} (\overrightarrow{\Omega B}, \widehat{\overrightarrow{\Omega D}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \Omega D = 2\,\Omega B \end{cases}$

or $\begin{cases} (\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ AD = 2AB \end{cases}$

donc $A = \Omega$. centre de f.

3) a/ On a $I = A * E$ centre de Γ.

$f(I) = f(A) * f(E)$

$= A * F$

$= J$.

Donc Γ est le cercle de centre J et de rayon $2 \times IE = AE$

b/ On a $(\overrightarrow{GD}, \widehat{\overrightarrow{GB}}) \equiv (\overrightarrow{GD}, \widehat{\overrightarrow{GA}}) + (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB})$ $[2\pi]$

avec $(\overrightarrow{GD}, \overrightarrow{GA})$ et $(\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FA})$ interceptent deux arcs $\overset{\frown}{AD}$ et $\overset{\frown}{DA}$ du cercle (Γ')

$\equiv \pi + (\overrightarrow{FD}, \widehat{\overrightarrow{FA}}) + (\overrightarrow{EA}, \widehat{\overrightarrow{EB}})$ $[2\pi]$

$\equiv \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$

$\equiv \pi$ $[2\pi]$

D'où G, D et B sont alignés

4) $g = f \circ S_{(AB)}$.

a/ $g(A) = f \circ S_{(AB)}(A)$

$= f(S_{(AB)}(A))$

$= f(A)$

$= A$.

$g(B) = f \circ (S_{(AB)}(B))$

$= f(B)$

$= D$.

b/ g est la composée d'une ~~deux~~ sim directe de rapport 2 et d'une autre indirecte de " 1.

Donc g est une similitude indi de rapport $2 \neq 1$.

or $g(A) = A$.

donc A centre de g.

Comme $g(B) = D$.

alors son axe Δ' porte la bissec intérieure de $(\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{AD}})$.

D'où $\Delta' = (AE)$.

$g = S_{ind}(A, 2, (AE))$.

c/ On a $(AE) \perp (AF)$

et $\{A\} = (\Gamma') \cap (AE)$

donc (AE) est tangente à Γ' en

" $g((AE))$ " " " $g(\Gamma')$

or (AE) est l'axe de g.

donc $g((AE)) = (AE)$ tangente à Γ'' en

D'où (AE) tangente à (Γ') et (Γ'') en

Ex 4

$A(1,0,1)$

$B(1,1,1)$

$C(1,1,0)$

$D(0,1,1)$

$\Omega = A * B$ donc $\Omega(1, \frac{1}{2}, 1)$.

1) a/ On a $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & 1\\-1 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & 0\\-1 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AO}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ donc A, O et C ne sont pas alignés.

D'où il déterminent un plan P dont $\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal.

D'où $P : x - y - z + d = 0$.

$O \in P$ donc $0 - 0 - 0 + d = 0$

$d = 0$.

$P : x - y - z = 0$.

b/ On a $I(1,0,0)$ et $D(0,1,1)$

$\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AO}\wedge\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{ID}$

D'où (ID) est perpendiculaire à P en $E(x_E, y_E, z_E)$.

On a : $E \in (ID)$ ssi $\begin{cases} x_E = -\alpha \\ y_E = \alpha + 1 \ ;\ \alpha \in \mathbb{R} \\ z_E = \alpha + 1 \end{cases}$

$E \in P$ ...

$\alpha = -\frac{2}{3}$.

$$\begin{cases} x_E = +\frac{2}{3} \\ y_E = \frac{1}{3} \\ z_E = \frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow E\left(+\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

2) $h : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$

$M \longmapsto M'$ / $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{AM'} = \vec{0}$.

a/ $h(M) = M'$ ssi $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{AM'} = \vec{0}$.

$2\overrightarrow{M\Omega} + 2\overrightarrow{\Omega A} - \overrightarrow{M\Omega} - \overrightarrow{\Omega B} + 3\overrightarrow{A\Omega} + 3\overrightarrow{\Omega M'} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{M\Omega} + 2\overrightarrow{\Omega A} - \overrightarrow{\Omega B} - 3\overrightarrow{\Omega A} = -3\overrightarrow{\Omega M'}$

$\overrightarrow{M\Omega} - (\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B}) = -3\overrightarrow{\Omega M'}$

Or $\Omega = A * B$ donc $\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} = \vec{0}$

donc $\overrightarrow{M\Omega} = -3\overrightarrow{\Omega M'}$

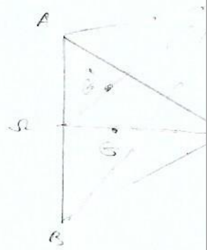
$\overrightarrow{\Omega M'} = +\frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega M}$

Donc h homothétie de centre Ω et de rapport $+\frac{1}{3}$.

b/ G centre de gravité de ABD.

$\Omega = A * B$.

donc $[\Omega D]$ médiane issue de D en ABD.



D'où $\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega D}$

$h(D) = G$.

De même $h(I) = G'$.

On a $\overrightarrow{\Omega G'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega I}$

donc $\begin{cases} x_{G'} - x_\Omega = \frac{1}{3}(\\ y_{G'} - y_\Omega = \frac{1}{3}(\end{cases}$

$$\begin{cases} x_{G'} = \frac{1}{3}(1-1)+1 \\ y_{G'} = \frac{1}{3}(0-\frac{1}{2})+\frac{1}{2} \\ z_{G'} = \frac{1}{3}(0-1)+1 \end{cases}$$

$G'(1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ √ correcte.

On a $1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=0$

donc $G' \in P$.

c/ On a $h(D)=G$. $h(I)=G'$. $(ID) \perp P$ en E $\Big\}$ $h((ID))=(GG')$ est $\perp$ à $h(P)=P'$ en $h(E)=E'$

On a $\vec{\Omega E'} = \frac{1}{3}\vec{\Omega E}$.

donc
$$\begin{cases} x_{E'} = \frac{1}{3}(x_E - x_\Omega)+x_\Omega \\ y_{E'} = \frac{1}{3}(y_E - y_\Omega)+y_\Omega \\ z_{E'} = \frac{1}{3}(z_E - z_\Omega)+z_\Omega \end{cases}$$

donc
$$\begin{cases} x_{E'} = \frac{1}{3}(+\frac{2}{3}-1)+1 \\ y_{E'} = \frac{1}{3}(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})+\frac{1}{2} \\ z_{E'} = \frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)+1 \end{cases}$$

donc $E'(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9})$.

3) a/ On a $(GG') \perp P$ et $\{G'\} = P \cap (GG')$ $\Big\}$ donc

G' est le projeté orthogonal du W (centre de (S)) sur P.

donc (S) est tangente à P en E.

De même (S) " " " P' en E'.

b/ Comme G', W et E' sont alignés

car G', W et E' ... (GG')

$$\begin{cases} x_W = \frac{x_{G'}+x_{E'}}{2} \\ y_W = \frac{y_{G'}+y_{E'}}{2} \\ z_W = \frac{z_{G'}+z_{E'}}{2} \end{cases} \text{ssi } \begin{cases} x_W = \frac{17}{9} = \ldots \\ y_W = \frac{7}{18} = \ldots \\ z_W = \frac{5}{9} = \ldots \end{cases}$$

Soit R le rayon de S.

$$\cancel{R = \frac{GE'}{2}}$$
$$\cancel{= \frac{1}{2}\sqrt{(x_{E'}-x_E)^2+(y_{E'}-y_E)^2+(z_{E'}\ldots}}$$
$$\cancel{= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{81}+\frac{1}{81}+\frac{16}{81}}}$$
$$\cancel{= \frac{\sqrt{21}}{18}}$$
$$\cancel{\simeq 0,25458}$$

$$\boxed{\cancel{R^2 = \frac{7}{108}}}$$

$$\cancel{S: (x-\frac{7}{9})^2+(y-\frac{7}{18})^2+(z-\frac{5}{9})^2 = \ldots}$$

$R^2 = \frac{(G'E')^2}{4} = \ldots$

2ème méthode : $M \in S$ ssi $\vec{ME'} \cdot \vec{MG'} = 0$.

Ex 5

$f :]0,+\infty[\setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x}$.

I/ 1) a/ f est dérivable sur $]0,+\infty[\setminus \{1\}$

donc pour $x \in]0,+\infty[\setminus \{1\}$;

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

$$= \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x \ln^2 x} < 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} = 0.$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} = +\infty.$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	||	$-$	
$f(x)$	||	$+\infty \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 0^+$	

b/ pour $x \in]0,1[$.

f est strictement décroissante et continue sur $]0,1[$.

elle réalise une bijection de $]0,1[$ sur $f(]0,1[) =]\lim_{0^+} f, \lim_{1^-} f[$

$= \mathbb{R}$.

Comme $0 \in \mathbb{R}$.

alors $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha \in]0,1[$.

On a $f(0,5) = 0$

et f continue sur $[0,5 ; 0,6]$.

D'après le TVI, il existe une unique solution $\alpha \in [0,5 ; 0,6]$ /

$f(\alpha) = 0$.

On a $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\ln \alpha} = 0$

$$-\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\ln \alpha}$$

$$-\alpha = \ln \alpha.$$

2/ $f(e) = \frac{1}{e} + \frac{1}{\ln e}$

$= 1 + \frac{1}{e}$.

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} + \frac{1}{\ln \frac{1}{e}}$

$= e + \frac{1}{-1}$

$= e - 1$

3) $g :]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto g(x) = 2 \cdot f(x^2)$

a/ pour $x \in]1,+\infty[$;

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} - 2\left(\frac{1}{x^2}\right.$$

$$= \frac{1}{x} + \cancel{\frac{1}{\ln x}} - \frac{2}{x^2} - \cancel{\frac{1}{\ln x}}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}.$$

b/ pour $x \in]1,+\infty[$

$$f(x) - g(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^3}$$

$$= \frac{x(x-2)}{x^3}$$

x	1		2		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	
position		C_f au dessous de C_g	$C_f = C_g$	C_f au dessus de C_g	

c) $x \in [2, +\infty[$.

On a $M(x, f(x))$
$N(x, g(x))$.

$$MN = \sqrt{(x-x) + (f(x) - g(x))^2}$$

$$= |f(x) - g(x)|$$

$$= \left| \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right| = \left| \frac{x^2 - 2x}{x^3} \right|$$

~~On pose h~~

$$= \frac{x^2 - 2x}{x^3} \quad \text{car } x \geq 2.$$

$$= \frac{x-2}{x^2}.$$

On pose $h : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{x-2}{x^2}$.

h est dérivable sur $[2, +\infty[$.

pour $x \geq 2$,

$$h'(x) = \frac{1 \times x^2 - 2x(x-2)}{x^4}$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 4}{x^3} = \frac{4 - x}{x^3}$$

x	2		4		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	0

MN est maximale pour $x = 4$;
$MN = \frac{1}{8}$.

4) $$\mathcal{A} = \int_2^e |f(x) - g(x)| \, dx$$

$$= \int_2^e (f(x) - g(x)) \, dx$$

$$= \int_2^e \frac{x-2}{x^2} \, dx$$

$$= \int_2^e \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \, dx$$

$$= \left[\ln x + \frac{2}{x} \right]_2^e$$

$$= \ln e - \frac{e}{e} - \ln 2 - \frac{2}{2}$$

$$= \cancel{1} - \frac{e}{e} - \ln 2 - \cancel{1}$$

$$= \frac{e}{2} - \ln 2 \ (u.a)$$

II) $n \in \mathbb{N}^*$; $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right]$.

$$V_n(x) = \int_x^{\frac{1}{e}} \frac{1}{(\ln t)^n} \, dt$$

$$U_n = \lim_{x \to 0^+} V_n(x).$$

~~1) pour $n \geq 1$ ... $V_{n+1}(x) = \int_x^{\frac{1}{e}} \frac{1}{(\ln t)^{n+1}} dt$~~

~~On pose $u(t) = \frac{1}{(\ln t)^{n+1}}$, $u'(t) = ...$~~

1)