## Exercice 1 :

pour chacune des questions suivantes, répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse.

1) Les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $12x-5y=3$ sont les couples $(4+10k\ ,\ 9+24k)$, $k\in\mathbb{Z}$.

2) Si $\begin{cases} x \equiv 6 \pmod 7 \\ x \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$ alors $x \equiv 13 \pmod{28}$.

3) Si $p$ est un entier premier distinct de 2, alors $p^2 \equiv 1 \pmod 4$.

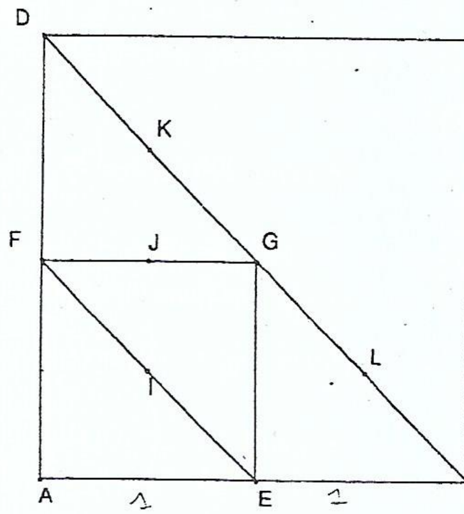
4) Soit $p$ un entier, $x=49p-7$ et $y=14p-6$ tel que $p \equiv 3 \pmod 4$, alors $x\wedge y = 2$.

## Exercice 2 :

Le plan est orienté dans le sens direct.

On donne ci-contre un carré direct $ABCD$ de centre $G$ tel que $AB=2$.

On désigne par E, $F$, $H$, $I$, $J$, $K$ et $L$ les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AD]$, $[BC]$, $[EF]$, $[FG]$, $[DG]$ et $[BG]$.




1) Soit $f$ la similitude directe qui transforme $B$ en $F$ et $E$ en $K$.

a) Montrer que $f$ est de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{-3\pi}{4}$.

b) Prouve que $f((EG))=(BD)$ et que $f((BG))=(GF)$.

c) En déduire que $G$ est le centre de $f$, puis déterminer $f(L)$ et $f(D)$.

2) Soit $\varphi$ la similitude indirecte qui transforme $K$ en $F$ et $F$ en $G$.

a) Déterminer $\varphi o f(B)$ et $\varphi o f(E)$.

b) Montrer que $\varphi o f$ est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur. En déduire que $\varphi(G) = A$.

c) Prouve alors que $D$ est le centre de $\varphi$.

3) On muni le plan du repère orthonormé direct $(A,\ \overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{AF})$. Soit $h$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que : $z' = \frac{1}{2}\, i\, \bar{z} + 1 + i$.

a) Montrer que $h$ est une similitude indirecte dont on précisera le rapport, le centre et l'axe.

b) Montrer que $h o\varphi = f$

## Exercice 3 :

Soit E l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(-x).f'(x)=1$

1) a) Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=2e^{\frac{x}{4}}$ est un élément de E.
En déduire que E est non vide.

b) Montrer que tout élément $f$ de E ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $f\in E$, on pose $c=f(0)$ et on désigne par $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(-x).f(x)$

a) Montrer que $g$ est constante sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que $f$ est une solution de l'équation différentielle $(S)\begin{cases} y' = \frac{1}{c^2}\, y \\ y(0)=c \end{cases}$

3) a) Résoudre l'équation différentielle (S)

b) Déterminer alors l'ensemble E

## Exercice 4 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1-i)z - i = 0$

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ . Soient A et B et $J = A * B$ où $Z_A = -1$ , $Z_B = -i$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' = \frac{1}{\bar{z}}$ , M et M' les points d'affixes respectives z et z'

a) Montrer que O, M et M' sont alignés

b) Déterminer l'ensemble des points pour lesquels $z' = z$

3) Soit C l'ensemble des points M(z) tel que $z + \bar{z} + 2z\bar{z} = i\bar{z} - iz$

a) Donner une équation de C. En déduire que $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre [AB]

b) Soit $J = A*B$ et J' son image. Vérifier que $J' \in \mathscr{C}$

4) On pose $z = x + iy$ ; $x , y \in \mathbb{R}$ et $(x , y) \neq (0 , 0)$ ; $M \in (AB)$

a) Donner une équation cartésienne de la droite (AB)

b) Montrer que $OM^2 = x^2 + (x+1)^2$. En déduire que $M' \in \mathscr{C}$

c) Déduire de ce qui précède la construction de l'image d'un point M de (AB)

## Exercice 5 :

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de $f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) a) Dresser le tableau de variation de $f$ et tracer $\mathscr{C}_f$.

b) Montrer que $f$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]0,\frac{1}{4}]$.

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in ]0,\frac{1}{4}]$ et tracer sa courbe $\mathscr{C}'$

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha$ et vérifier que $0 < \alpha < \frac{1}{4}$.

b) Soit $A$ l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$ , $\mathscr{C}'$ et les droites $x = 0$ et $y = 0$ . Montrer que $A = 2\int_0^\alpha (f(x) - x).dx$ calculer alors $A$ en fonction de $\alpha$ .

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_n(x) = \int_0^x (f(t))^n.dt$ , $x \in [0,+\infty[$ .

a) Montrer que pour tout $t \in [0,+\infty[$ on a $e^t \leq 1 + e^t \leq 2e^t$ . En déduire que $\frac{1}{4}e^{-t} \leq f(t) \leq e^{-t}$ .

b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1}{n4^n}[1-e^{-nx}] \leq F_n(x) \leq \frac{1}{n}[1-e^{-nx}]$ .

4) a) Montrer que $F_n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que $F_n$ admet une limite finie $U_n$ quand $x$ tend vers $+\infty$

b) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\frac{1}{n4^n} \leq U_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire alors $\lim_{n\to\infty} U_n$ .

**** *Bonne chance* **** *prof : M.B*

## Série de Révision - 3

### Ex 1)

1) On a : $9\times 12 - 5\times 21 = 3$.

donc $(9, 21)$ solution de $(E)$

or $(9, 21)$ n'est pas de la forme $\{(4+10k, 9+24k), k\in\mathbb{Z}\}$

Faux

2) $\begin{cases} x\equiv 6 \pmod 7 \\ x\equiv 1 \pmod 4\end{cases}$ alors $\begin{cases} x\equiv 6+7 \pmod 7 \\ x\equiv 1+3\times 4 \pmod 4\end{cases}$

alors $\begin{cases} x\equiv 13 \pmod 7 \\ x\equiv 13 \pmod 4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} x-13\equiv 0 \pmod 7 \\ x-13\equiv 0 \pmod 4\end{cases} \\ \text{or } 7\wedge 4 = 1 \right\}$ $x\equiv 13 \pmod{28}$

Vrai.

3) Si $p$ est premier distinct de $2$.

alors $p$ est impair

d'où $(p-1)$ et $(p+1)$ sont pairs

$\Leftrightarrow \begin{cases} p-1 = 2q, \; q\in\mathbb{N} \\ p+1 = 2q', \; q'\in\mathbb{N}\end{cases}$

$(p-1)(p+1) = 4qq'$

donc $4 \mid (p-1)(p+1)$

$(p-1)(p+1) \equiv 0 \pmod 4$

$\Leftrightarrow p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 4$

$p^2 \equiv 1 \pmod 4$.

Vrai.

4) $p\equiv 3 \pmod 4$

$x = 49p - 7$

On pose $d = x\wedge y$.

On a $p\equiv 3 \pmod 4$

donc $p = 4n+3$, $n\in\mathbb{Z}$

$\begin{cases} x = 196n + 140 \\ y = 56n + 36\end{cases}$, $n\in\mathbb{Z}$

$\begin{cases} x = 4(49n + 35) \\ y = 4(14+9)\end{cases}$

$\left.\begin{matrix} 4\mid x \\ 4\mid y\end{matrix}\right\}$ $4\mid d$

donc $d\neq 2$.

Faux.

Ex5

$f : [0,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$

1) a/ $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

pour $x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{e^x.(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x).e^x}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{e^x + e^{3x} \cancel{-2e^{2x}} - 2e^{3x} \cancel{+2e^{2x}}}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{e^x(1+e^x)(1-e^x)}{(1+e^x)^4} \leq 0.$$

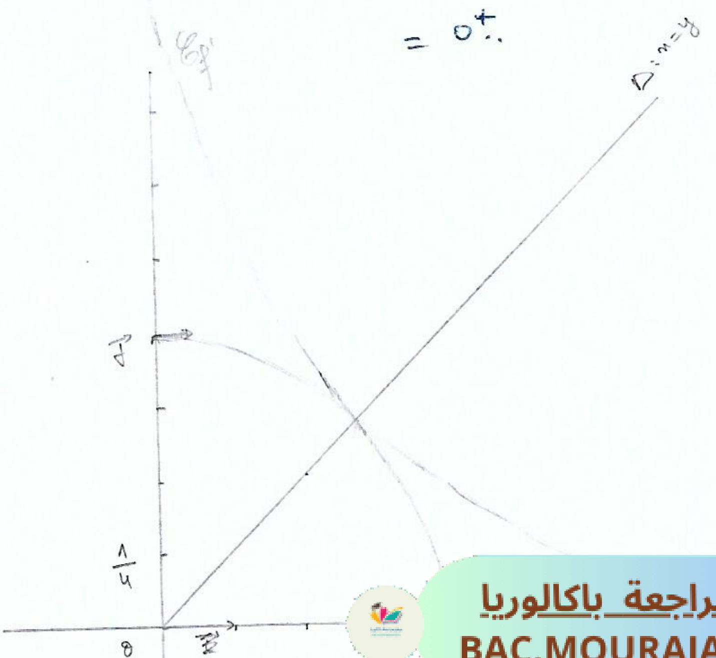
$f'(x) = 0$ ssi $1 - e^x = 0$

$x = 0$.

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\searrow$ | $0$ |

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x}+2+e^x}$$

$$= 0^+.$$




b/ $f$ est strictement croissante sur $[0,$ (et continue) donc elle réalise une bij de $[0,+\infty[$ sur $f([0,+\infty[) = ]0; \frac{1}{4}]$

c/ On pose $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x. \\ x \in ]0, \frac{1}{4}] \\ y \in [0,+\infty[ \end{cases}$

donc $\dfrac{e^y}{(1+e^y)^2} = x$.

d'où $e^y = x + 2x.e^y + xe^{2y}$

, $x.e^{2y} + (2x-1).e^y + x = 0$

$\Delta = (2x-1)^2 - 4x^2$

$= \cancel{4x^2} - 4x + 1 \cancel{-4x^2}$

$= 1 - 4x. \geq 0$

Si $x = \frac{1}{4}$, $\Delta = 0$.

$e^y = \dfrac{1-2x}{2x} = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

$y = 0$.

Si $x \in ]0, \frac{1}{4}[$, $\Delta > 0$.

$e^y = \dfrac{(1-2x).\sqrt{1-4x}}{2x}$ ou $e^y = -\dfrac{(1-2x)\sqrt{\phantom{1}}}{2x}$

(à rejeter <

$y = \ln(1-2x) + \frac{1}{2}\ln(1-4x) - \ln(2x)$

$f^{-1}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = \frac{1}{4} \\ \ln(1-2x) + \frac{1}{2}\ln(1-4x) - \ln(2x) \text{ si } x \in \end{cases}$

2) a/ On pose $h : [0,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) - x$.

$h$ est dérivable sur $[0,+\infty[$.

pour $x \geq 0$, $h'(x) = f'(x) - 1 < 0$

Donc $h$ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ et continue.

D'où elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $h([0,+\infty[) = ]\lim_{+\infty} h, h(0)]$

$= ]-\infty, \frac{1}{4}]$.

avec $\begin{cases} h(0) = f(0) = \frac{1}{4}. \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty. \end{cases}$

Comme $0 \in ]-\infty, \frac{1}{4}]$

$h(x) = 0$ admet u

$h$ est continue sur $[0, \frac{1}{4}]$
$h(0) = \frac{1}{4} > 0$
$h(\frac{1}{4}) = -3,8.10^{-3} < 0$

} D'après le TVI, il existe au moins une solution $\alpha$ / $h(\alpha) = 0$. ② avec $\alpha \in ]0, \frac{1}{4}[$

① et ② donnent :

$h(\alpha) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in ]0, \frac{1}{4}[$.

b/ L'aire en question est égal à 2 fois l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}$, $\Delta : y = x$ et $(O, \vec{j})$. (pour des raisons de symétrie par rapport à $\Delta$).

D'où

$$A = 2\left(\int_0^\alpha f(x)\,dx - \int_0^\alpha x\,dx\right)$$

$$= 2 \cdot \int_0^\alpha (f(x) - x)\,dx$$

$$= -2 \int_0^\alpha \left(\frac{-e^x}{(1+e^x)^2} - x\right) dx$$

$$= -2 \cdot \left[\frac{1}{1+e^x} - \frac{x^2}{2}\right]_0^\alpha$$

$$= -2\left(\frac{1}{1+e^\alpha} - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{2}{1+e^\alpha} + \alpha^2.$$

3) $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = \int_0^x (f(t))^n\,dt.$ ; $x \geq 0$.

a/ pour tout $t \geq 0$, On a :

$$e^t \geq e^0 = 1 \geq 0.$$

donc $e^t + e^t \geq 1 + e^t \geq e^t$.

$$2e^t \geq 1 + e^t \geq e^t.$$

~~donc~~

donc $0 < e^t \leq 1 + e^t \leq 2e^t$

" $0 < e^{2t} \leq (1+e^t)^2 \leq 4 \cdot e^{2t}$

" $\frac{e^{-2t}}{4} \leq \frac{1}{(1+ \dots}$

donc $\frac{e^{-t}}{4} \leq \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \leq e^{-t}$

" $\frac{e^{-t}}{4} \leq f(t) \leq e^{-t}$

b/ On a $0 < \frac{e^{-t}}{4} \leq f(t) \leq e^{-t}$ ; $t \geq$

donc $\frac{e^{-nt}}{4} \leq f^n(t) \leq e^{-nt}$ ; $n$

Les fonctions $t \mapsto e^{-nt}$ et $t \mapsto f^n(t)$ étant continues sur $[0, x]$ ; $x \geq 0$;

$$\int_0^x \frac{e^{-nt}}{4}\,dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-nt}\,dt$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{e^{-nt}}{-n}\right]_0^x \leq F(x) \leq \left[\frac{e^{-nt}}{-n}\right]_0^x$$

$$\frac{1}{4n}\left(1 - e^{-nx}\right) \leq F(x) \leq \frac{1}{n}\left(1 - e^{\dots}\right.$$

4) a/ $F_n$ est la primitive de $f^n(x)$ sur $[0$ qui s'annule en 0.

par suite, pour $x \geq 0$,

$$F_n'(x) = f^n(x) > 0 \ ; n \in \mathbb{N}$$

car $f(x) > 0$ sur $[0, +\infty[$.

D'où $F_n$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

* On a $x \geq 0$ donc $-nx \leq 0$ ; $n \in$

$$0 \leq e^{-nx} \leq 1.$$

$$1 \geq 1 - e^{-nx} \geq 0.$$

$$1 \geq \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n}\left(1 - e^{-nx}\right) \geq F_n(x)$$

D'où $F_n$ est une fonction croissante et majorée.

D'où elle admet une limite finie $l_n$ lorsque $x$ tend vers $(+\infty)$.

b/ pour tout $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, On a :

$$\frac{1}{4n}(1-e^{-nx}) \leq F_n(x) \leq \frac{1}{n}(1-e^{-nx})$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4n}(1-e^{-nx}) \leq U_n \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n}(1-e^{-nx})$$

$$\frac{1}{4n} \leq U_n \leq \frac{1}{n}.$$

Car $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} -nx = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = 0\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-nx} = 0$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0.$

## Ex 3 /

1) a/ (E) l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ /

$f(-x) \cdot f'(x) = 1 \; ; \; x \in \mathbb{R}.$

* On pose $h(x) = 2e^{\frac{x}{4}}$ ; $x \in \mathbb{R}$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour $x \in \mathbb{R}$ ;

$$h'(x) = 2 \cdot \frac{1}{4} e^{\frac{x}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{4}}.$$

$$h'(x) \cdot h(-x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{4}} \cdot 2 \cdot e^{-\frac{x}{4}}$$

$$= 1$$

Donc $h \in (E)$.

* (E) contient un élément h.

Donc $(E) \neq \emptyset$

b/ Soit $f \in (E)$.

Supposons que f s'annule sur $\mathbb{R}$.

alors il existe $x \in \mathbb{R}$ /

$f(-x) = 0$

donc $f(-x) \cdot f'(x) = 0 \neq 1$

$f \notin (E)$

alors ...

2) On pose $g(x) = f(-x) \cdot f(x)$ ; $x \in \mathbb{R}$

a/ g est dérivable sur $\mathbb{R}$. pour $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = -f'(-x) \cdot f(x) + f'(x) \cdot f(-x)$$

Si $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.

D'où $\begin{cases} f(x) \cdot f'(-x) = 1 \\ f(-x) \cdot f'(x) = 1 \end{cases}$

D'où $g'(x) = 1 - 1$

$= 0.$

Donc g est constante sur $\mathbb{R}$.

b/ pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(0) = f(0) \times f(0)$

$$f(-x) \cdot f(x) = c^2$$

$$f(-x) = \frac{c^2}{f(x)} \quad (f \neq 0)$$

~~or $f \in (E)$ donc $f'(-x) = \frac{1}{f(x)}$~~

or $f \in (E)$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{f(-x)}$

ssi $f'(x) = \dfrac{1}{\frac{c^2}{f(x)}}$

ssi $f'(x) = \dfrac{1}{c^2} \cdot f(x)$

D'où f solution de l'équation différentielle

(S) : $\begin{cases} y' = \frac{1}{c^2} \cdot y \\ y(0) = c \end{cases}$

3) a/ (S) : $\begin{cases} y' = \frac{1}{c^2} y \\ y(0) = c. \end{cases}$

Les solutions de (S) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = k \cdot e^{\frac{x}{c^2}}$ ; $k \in \mathbb{R}$.

or $f(0) = c$.

ssi $k \times e^{\frac{0}{c^2}} = c.$

$k = c.$

$f(x) = c \cdot e^{\frac{x}{c^2}}$ ; ...

b/ On a Si $f \in (E)$ alors $f(x) = c \cdot e^{\frac{x}{c^2}}$ ; $x \in \mathbb{R}$. $c \in \mathbb{R}$.

* Si $f(x) = c \cdot e^{\frac{x}{c^2}}$ ; $(x,c) \in \mathbb{R}^2$.

alors $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{c}{c^2} \cdot e^{\frac{x}{c^2}}$

$= \frac{1}{c} \cdot e^{\frac{x}{c^2}}$.

d'où $f(-x) \cdot f'(x)$

$= c \cdot e^{\frac{-x}{c^2}} \times \frac{1}{c} \cdot e^{\frac{x}{c^2}}$

$= 1$

donc $f$ solution de (E).

Conclusion : $f$ ~~sol~~ $\in (E)$

SSi

$f(x) = c \cdot e^{\frac{x}{c^2}}$ ; $(x,c) \in \mathbb{R}^2$.

D'où (E) est l'ensemble des fonctions definies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = c \cdot e^{\frac{x}{c^2}}$ ; $c \in \mathbb{R}$.

## Ex 4

1) $(E)$ : $z^2 + (1-i)z - i = 0$ ; $z \in \mathbb{C}$.

On a $1 - (1-i) + (-i) = 0$.

donc $z_1 = -1$ ; $z_2 = -\frac{-i}{1}$

$= i$.

$S_{\mathbb{C}} = \{-1, i\}$.

2) $A(z_A = -1)$ et $B(z_B = i)$

$z \in \mathbb{C}^*$, $M(z)$ et $M'(z')$ / $z' = \frac{1}{\overline{z}}$.

a/ On a pour $z \in \mathbb{C}^*$,

$\arg(z') \equiv \arg\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) [2\pi]$

$\arg(z') \equiv -\arg(\overline{z}) [2\pi]$

$\arg(z') \equiv \arg(z) [2\pi]$

donc $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv$

b/ $z' = z$ ssi $\frac{1}{\overline{z}} = z$

ssi $z\overline{z} = 1$

" $|z|^2 = 1$ ; $|z| > 0$

donc $|z| = 1$ ~~[illegible]~~

D'où $OM = 1$

$M \in \mathscr{C}_{(O,1)}$.

3) $(\mathscr{E}) := \{M(z) \in P \setminus \{O\} / z + \overline{z} + 2z\overline{z} = i\overline{z} - i$

a/ pour $z \in \mathbb{C}^*$,

$M(z) \in (\mathscr{E})$ ssi

$z + \overline{z} + 2z\overline{z} = i(\overline{z} - z)$

On pose $z = x + iy$ ; $x, y \in \mathbb{R}$.

Donc $2x + 2(x^2+y^2) = i(\cancel{x} - iy - \cancel{x}$

" $2(x + x^2 + y^2) - 2y = 0$.

" $x^2 + y^2 + x - y = 0$

" $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$.

" $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

" $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

D'où ~~[illegible]~~ $M$ appartient au cercle de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et son centre $\Omega$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$.

D'où $z_\Omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$= -\frac{1}{2}(1 - i)$

$= +\frac{1}{2}(z_A + z_B)$

$= z_J$.

Or $AB = |z_B - z_A|$

$= |i + 1|$

$= \sqrt{2}$

$= 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\mathscr{E} = \mathscr{C}_{[AB]}$.

b/ On a $Z_J = \frac{1}{2}(i-1)$.

$$Z'_J = \frac{1}{\overline{Z_J}}$$

$$= \frac{1}{\overline{\frac{1}{2}(i-1)}}$$

$$= \frac{-2}{1+i}$$

$$= \frac{-\cancel{2}(1-i)}{\cancel{2}}$$

$$= i-1.$$

D'où $J'(-1, 1)$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On a $\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$$= \frac{1}{2}.$$

alors $J' \in (\mathcal{E})$

4) a/ On a $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$

$$= i+1.$$

Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ directeur de $(AB)$

D'où $(AB)$ : $x - y + c = 0$ ; $c \in \mathbb{R}$

or $A(-1, 0) \in (AB)$

donc $-1 - 0 + c = 0$

$c = 1$.

$\Rightarrow \boxed{(AB) :\ x - y + 1 = 0}$

b/ On a $z = x + iy$ ; $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

$OM^2 = |z|^2$

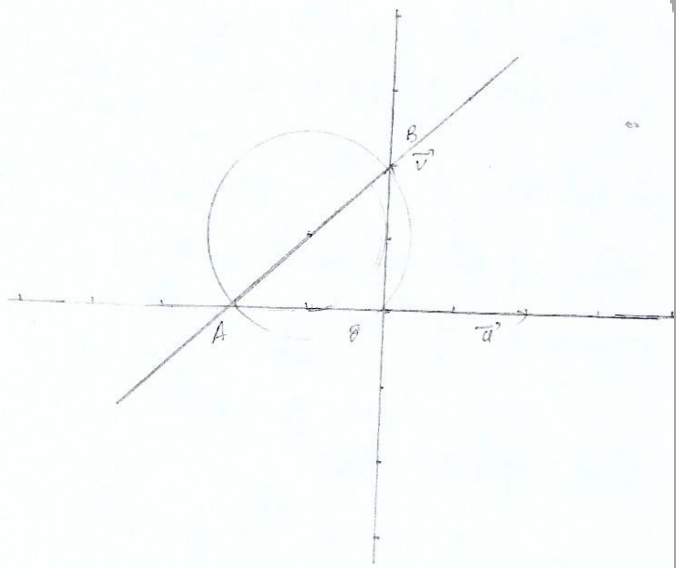
$= x^2 + y^2$.

Or $M \in (AB)$ donc $x - y + 1 = 0$

$y = 1 + x$

$y^2 = (1+x)^2$.

D'où $OM^2 = x^2 + (1+x)^2$.




c/ Pour tout point $M \in (AB)$.

On a $O$, $M$ et $M'$ alignés donc $M' \in (OM)$

et $M' \in (\mathcal{E})$.

D'où $\{M'\} \in (OM) \cap (\mathcal{E})$.

* Comme ~~...~~ $Z \neq 0$

donc $Z' \neq 0$.

" $M' \neq O$.

Ex 2

1) $f$ la similitude directe telle que :

$f(B) = F \quad , \; f(E) = K.$

a/ Soit $\alpha$ son rapport :

$$\alpha = \frac{KF}{BE} = \frac{KF}{FD}$$

$$= \sin(F\hat{D}K)$$

$$= \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Soit $\theta$ une mesure de son angle :

$$\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{FK}}) \; [2\pi]$$

$$\equiv (\widehat{\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{FK}}) \; [2\pi]$$

$$\equiv \pi + (\widehat{\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FK}}) \; [2\pi]$$

$$\equiv \pi + \frac{\pi}{4} \; [2\pi]$$

$$\equiv -\frac{3\pi}{4} \; [2\pi].$$

D'où $f$ est la similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.

b/ Comme $f(E) = K$.

alors $f((EG))$ est la droite passant par $K$ faisant un angle $-\frac{3\pi}{4}$ avec $(EG)$.

D'où $f((EG)) = (BD)$

Car $\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{DB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DB}}) \; [2\pi] \\ \qquad\qquad \equiv -\frac{3\pi}{4} \; [2\pi]. \\ \text{et} \quad K \in (BD) \end{cases}$

De même $f(B) = F$

Donc $f((BG))$ est la droite passant par $F$ faisant un angle $-\frac{3\pi}{4}$ avec $(BG)$

Or $\begin{cases} F \in (GF \ldots \end{cases}$

D'où $f((BG)) = (GF)$.

c/ * Comme $\{G\} = (BG) \cap (EG)$

$\{f(G)\} = f((BG)) \cap f((EG))$

$\{f(G)\} = (GF) \cap (BD)$

$f(G) = G$

D'où $G$ centre de $f$.

* Comme $L = G * B$

$f(L) = f(G) * f(B)$

$f(L) = G * F$

$f(L) = J.$

* Comme $\frac{FD}{GD} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{\pi}{4}).$

alors $\frac{GH}{GD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

or $(\widehat{\overrightarrow{GD}, \overrightarrow{GH}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{GD}, \overrightarrow{GF}}) + (\widehat{\overrightarrow{GF}, \ldots}$

$\equiv +\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{\ldots} \; [2\pi]$

$\equiv -\frac{3\pi}{4} \; [2\pi]$

D'où $\begin{cases} GH = \frac{\sqrt{2}}{2} GD \\ (\widehat{\overrightarrow{GD}, \overrightarrow{GH}}) \equiv -\frac{3\pi}{4} \; [2\pi] \end{cases}$

$f(D) = H.$

2) $\varphi$ similitude indirecte /

$\varphi(K) = F \; , \; \varphi(F) = G.$

a/ $\varphi \circ f(B) = \varphi(f(B))$

$= \varphi(F)$

$= G$

$\varphi \circ f(E) = \varphi(f(E))$

$= \varphi(K)$

$= F.$

b/ Soit $\alpha'$ le rapport de $\varphi$ :

$\alpha' = \frac{FG}{KF} = \sqrt{2}.$

… la composée d'une si… … $\sqrt{2}$ … et d'une autre …

D'où $\varphi\circ f$ est une similitude indirecte de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=1$.

par suite $\varphi\circ f$ est un antidéplacement

Comme $\varphi\circ f(B)=G$

$\varphi\circ f(E)=F$

$med[BG]=(EH)$

$med[EF]=(AG)\neq(EH)$

alors $\varphi\circ f$ n'est pas une symétrie orthogonale.

D'où c'est une symétrie glissante.

On pose $\Delta$ son axe et $\vec{u}$ son vecteur

$\varphi\circ f(B)=G$ donc $L=B*G\in\Delta$.

$\varphi\circ f(E)=F$ donc $I=E*F\in\Delta$.

D'où $\Delta=(IL)$.

Or $\varphi\circ f(E)=t_{\vec{u}}\circ S_\Delta(E)$

$F=t_{\vec{u}}(S_{(IL)}(E))$

$=t_{\vec{u}}(G)$ (car $(IL)=med[EG]$)

donc $\overrightarrow{GF}=\vec{u}$.

Par suite $\varphi\circ f=t_{\overrightarrow{GF}}\circ S_{(IL)}$

$=S_{(IL)}\circ t_{\overrightarrow{GF}}$.

D'où $\varphi\circ f(G)=S_{(IL)}\circ t_{\overrightarrow{GF}}(G)$

$(f(G)=G)$ $\varphi(G)=S_{(IL)}(t_{\overrightarrow{GF}}(G))$

$\varphi(G)=S_{(IL)}(F)$

$\varphi(G)=A$.

c/ ~~On pose son centre de A~~

On a DFG est isocèle rectangle direct e...

D ... $\varphi(D)\varphi(F$ ...

sig $\varphi(D)GA$ isocèle rectangle indirect en $G$.

Or $DGA$ " " " " " en $G$.

Donc $\varphi(D)=D$.

D'où $D$ centre de $\varphi$.

3) $h: \mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{P}$

$M(z)\longmapsto M'(z')$ /

$z'=\frac{1}{2}i\bar{z}+1+i$.

a/ $z'$ est de la forme $a\bar{z}+b$

avec $\begin{cases}a=\frac{1}{2}i\\ b=1+i\end{cases}$

Donc $h$ est une similitude indirecte de rapport $|a|=\frac{1}{2}$; de centre

$W(z_W)$ avec

$z_W=\dfrac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}=\dfrac{\frac{1}{2}i(1-i)+1+i}{1-(\frac{1}{2})^2}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}+1+i}{1-\frac{1}{4}}$

$=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}(i+1)\right)$

$=2+2i$.

$=z_C$.

Donc $h$ a pour centre $C$, et de rapport $\frac{1}{2}$.

~~On a h(A) = G~~

~~car z_A'~~

On pose $A'=h(A)$.

On a $z_{A'}=1+i$

$=z_G$.

Donc $h(A)=G$.

Comme $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ ; $\frac{1}{2}>0$.

alors $(AG)$ est ~~la bissectrice~~ l'axe de $h$.

... $h=S_{(C,\frac{1}{2},(A$ ...

b/ $h\circ\varphi$ est la composée de deux similitude indirectes.

Donc $h\circ\varphi$ est une similitude directe.

On a $\begin{cases} h\circ\varphi(G) = h(A) \\ \qquad\qquad = G \\ f(G) = G \end{cases}$

or $f(D) = H$.

$h\circ\varphi(D) = h(D)$.

On pose $D' = h(D)$

$$Z_{D'} = \frac{1}{2}i\left(\overline{Z_D}\right) + 1 + i$$

$$= \frac{1}{2}i(-2i) + 1 + i$$

$$= 2 + i$$

$$= Z_H.$$

Donc $\begin{cases} h\circ\varphi(D) = h(D) \\ \qquad\qquad = H. \\ f(D) = H \end{cases}$

Donc $f$ et $h\circ\varphi$ sont deux similitudes directes qui coïncident sur 2 points

Donc $f = h\circ\varphi$.