Exercice 1 : (Vrai – Faux)

Pour chacune des questions suivantes répondre par « Vrai » ou « Faux » en justifiant la réponse :

1) Si $57n \equiv 0 (\text{mod } 2014)$ alors $n \equiv 0 (\text{mod } 106)$

2) L'équation $57x + 19y = 2014$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$

3) Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_1^{\ln x} \frac{e^t}{1+t^2}\, dt$

  a) F est définie et dérivable et strictement croissante sur $]0, +\infty[$

  b) La suite de terme général $U_n = F(e^n)$ est convergente

Exercice 2 :

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = 2\times10^n + 1$.

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n, a_n est divisible par 3.

  b) Discuter suivant n le reste de la division euclidienne de a_n par 11.

  c) En déduire que pour tout n, a_n et 11 sont premiers entre eux.

2) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : a_2x + 11y = 1$.

  a) Justifier que (E) admet au moins une solution.

  b) Montrer que si (x, y) est une solution de (E), alors $x \equiv 4 (\text{mod } 11)$.

  c) Résoudre alors (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

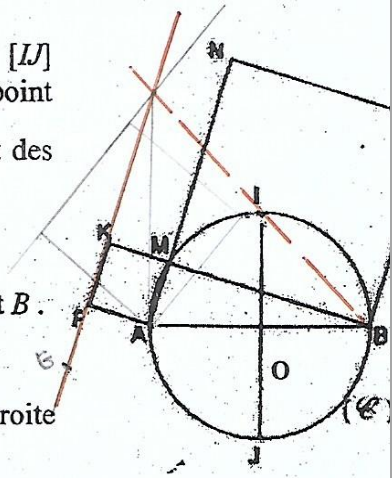
3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

  a) Déterminer les racines quatrième de $16\, e^{i\pi a_n}$

  b) On considère le point A_n d'affixe $z_n = 2e^{i\pi\frac{a_n}{4}}$. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, A_n appartient à cercle fixe dont on précisera le centre et le rayon.

  c) Montrer que pour tout n non nul, on a $A_n \in \{A_1, A_2\}$.

Exercice 3 :



Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci contre, $[AB]$ et $[IJ]$ sont deux diamètres perpendiculaires du cercle (𝒞) de centre O, M est un point du cercle (𝒞) tel que $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $MBEN$ et $MKFA$ sont des carrées de sens direct.

1) Montrer que les points E, F et M sont alignés.

2) On désigne par r_1 et r_2 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs A et B.

  a) Montrer que $r_1 \circ r_2$ est la symétrie centrale de centre I.

  b) Déterminer $r_1 \circ r_2(E)$. En déduire que lorsque M varie, la droite (EF) passe par un point fixe que l'on déterminera.

3) Soit S la similitude directe tel que $S(O) = I$ et $S(J) = B$

  a) déterminer le rapport et l'angle de S.

  b) Montrer que A est le centre de S.

  c) Déterminer $S(M)$

4) a) Construire le point G image de F par S.

  b) Montrer que F est le milieu du segment $[KG]$.

  c) En déduire que lorsque M varie, la droite (KF) passe par un point fixe P. Construire P

5) Soit f la similitude indi… B

  a) Déterminer … f. En déduire son axe

  b) Montrer qu… sera le vecteur et l'axe

Exercice 4 : Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des points M(x,y) tel que $y^2-4y-4x=0$ et $\mathscr{C}$ le cercle du centre O et de rayon 2. Montrer que $\mathscr{P}$ est une parabole dont on précisera le foyer F et la directrice. Vérifier que $F\in\mathscr{C}$

2) a) Vérifier que $O\in\mathscr{P}$ et écrire une équation de la tangente à $\mathscr{P}$ en O.

b) Tracer T et $\mathscr{P}$.

3) Soit Γ une parabole de foyer un point $F\in\mathscr{C}\setminus\{A(-2,0)\}$ de directrice la droite D : x = -2 . On se propose de déterminer l'ensemble (E) des sommets de Γ.

a) On pose F(a, b) . Soit M(x,y) un point de (E) . Exprimer x et y en fonction de a et b.

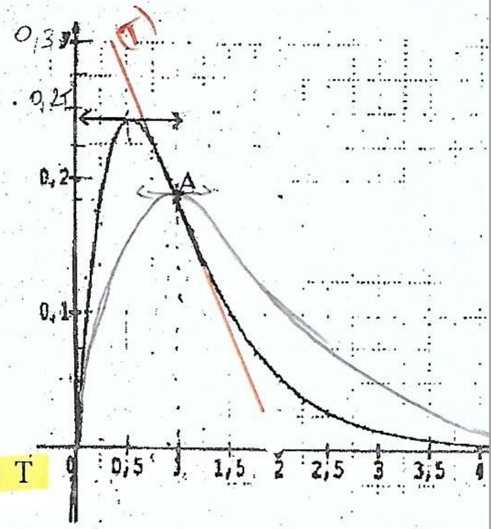
b) En déduire que $M\in(E)$ si et seulement si $(x+1)^2+\frac{1}{4}y^2=1$

c) Donner alors la nature de (E) puis tracer (E).

4) Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x,y)$ tel que $x^2+2x=\frac{1}{4}y|y|$.

Montrer que $\mathscr{D}$ est la réunion d'une partie E_1 de E et une partie H_1 d'une hyperbole H dont on précisera les sommets et les asymptotes.

Exercice 5 : On donne dans le graphique ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f dérivable sur $[0,+\infty[$ $\mathscr{C}$ passe par le point $A(1,\frac{1}{2e})$.



1) Soit $I=\int_0^1 f(x).dx$.

a) Donner une interprétation géométrique de I

b) Montrer que $I\geq\frac{1}{4e}$.

2) On admet que $f(x)=\frac{xe^{-x}}{1+x^2}$

Ecrire une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A puis construire T

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x)=\frac{x}{2}e^{-x}$. On note $\mathscr{C}'$ sa courbe

a) Étudier les variations de h

b) Préciser la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ puis tracer $\mathscr{C}'$ sur la même annexe

c) Calculer l'aire J (en UA) du domaine limité par $\mathscr{C}'$, $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations x = 0 et x = 1

4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose : $U_n=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x).dx$ et $S_n=U_1+U_2+....+U_n$.

a) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x).dx$.

c) Vérifier que pour tout $x\in[0,+\infty[$, on a : $f(x)\leq x$. En déduire que $S_n\leq\frac{1}{2}(1-\frac{1}{(n+1)^2})$.

d) En déduire que (S_n) est convergente vers un réel ℓ et vérifier que $\ell=I$.

5) Donner à l'aide de ce qui précède un encadrement de la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et les droites x = 0 et x = 1

Sujet de Révision 2

Ex 5

1) a/ I est la mesure d'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}$, l'axe $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations $x=1$, $x=0$.

b/ On pose $B(1,0)$.

Le triangle OAB est inclus dans la partie du plan décrite précédemment.

D'où $I \geq \mathcal{A}_{OAB}$

ssi $I \geq \dfrac{OB \times AB}{2}$

ssi $I \geq \dfrac{1 \times \frac{1}{2e}}{2}$

ssi $I \geq \dfrac{1}{4e}$

2) $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \dfrac{x \cdot e^{-x}}{1+x^2}$

f est dérivable sur $[0,+\infty[$.

Pour $x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{(e^{-x} - x.e^{-x})(1+x^2) - 2x(x.e^{-x})}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{e^{-x}\left((1-x)(1+x^2) - 2x^2\right)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{e^{-x}(1+x^2-x-x^3-2x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{e^{-x}(1-x-x^2-x^3)}{(1+x^2)^2}$$

$T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$T : y = \dfrac{-2}{e.4}(x-1) + \dfrac{1}{2e}$

$T : y = \dfrac{-x}{2e} + \dfrac{1}{e}$.

3) $h : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x e^{-x}$ …

a/ h est dérivable sur $[0,+\infty[$.

pour $x \in [0,+\infty[$,

$$h'(x) = \frac{e^{-x} - x.e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x}}{2}(1-x)$$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{+\infty} h = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x.e^{-x}}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2.e^{x}} = 0$

b/ pour $x \geq 0$,

$$f(x) - h(x) = x.e^{-x}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\right).$$

$$= x.e^{-x}\left(\frac{2-1-x^2}{2(1+x^2)}\right)$$

tableau

$$= x.e^{-x}\left(\frac{(1+x)(1-x)}{2(1+x^2)}\right).$$

pour $x \geq 1$, $f(x) - h(x) \leq 0$

ssi $\mathcal{C}$ au dessous de $\mathcal{C}'$

pour $0 \leq x \leq 1$, $f(x) - h(x) \geq 0$

ssi $\mathcal{C}$ au dessus de $\mathcal{C}'$.

c/ $J = \displaystyle\int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x.e^{-x}}{2}\,dx$.

On pose $u(x) = x$, $u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x}$, $v(x) = -e^{-x}$

$$J = \frac{1}{2}\left(\left[-e^{-x}.x\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e} + \left[-e^{-x}\right]_0^1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{e}\ \cdot u.a.$$

4) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$.

$\left(S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k\right)$

a/ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = U_{n+1}$.

$= \displaystyle\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}$ …

f est positive sur $[0,+\infty[$ et $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$.

Donc $\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} f(x)dx \geq 0$.

ssi $S_{n+1} \geq S_n$.

D'où (S_n) est croissante.

b/ pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(x) + \dots$$

$$+ \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$$

$$= \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x)\,dx$$

(En appliquant la relation de chales n fois)

c/ pour $x \in [0,+\infty[$,

$\cancel{f(x) - x = \frac{x.e^{-x}}{1+x^2} - x}$

Think of $f(x)-x$

On a

$$-x \leq 0$$

$$e^{-x} \leq 1\,;$$

$$x.e^{-x} \leq x \text{ . et } \frac{1}{1+x^2} \leq 1.$$

$$\frac{x e^{-x}}{1+x^2} \leq x.$$

$$f(x) \leq x$$

Les fonctions f et $x \mapsto x$ continues sur $[\frac{1}{n+1}, 1]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x)\,dx \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} x\,dx$$

$$S_n \leq \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{\frac{1}{n+1}}^{1}$$

$$S_n \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

d/ On a $S_n \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \leq \frac{1}{2}$.

(S_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$.

Elle est donc

On pose pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

F est la primitive de f sur $\mathbb{R}_+$.

Donc elle est dérivable et continue sur $\mathbb{R}_+$.

pour $n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x)\,dx$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^{\frac{1}{n+1}} f(x)$$

$$= I - F\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

$$\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \\ \lim_{x \to 0} F(x) = F(0) = 0 \end{cases}$$

(F continue à droite en

D'où $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} I - F($

$$= I - 0$$

$$= I.$$

5) Soit $\mathcal{A}$ la partie du plan limitée par $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=0$.

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (f(x) - h(x))\,dx$$

$$= I - J.$$

$\frac{1}{4e} \leq I$ et $I = \ell \leq$

donc $\frac{1}{4e} \leq I \leq \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{4e} - J \leq I - J \leq \frac{1}{2} - J$$

$$\leq I - J \leq$$

$$\leq \mathcal{A} \leq$$

Ex 2

1) pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2 \times 10^n + 1$.

a/ On a $10 \equiv 1 \pmod 3$

$10^n \equiv 1 \pmod 3$

$2 \times 10^n + 1 \equiv 2 \times 1 + 1 \pmod 3$

$a_n \equiv 0 \pmod 3$

donc $3 \mid 2 \times 10^n + 1$

$3 \mid a_n$.

b/ On a $10 \equiv -1 \pmod{11}$

$10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$

$2 \times 10^n + 1 \equiv 2 \times (-1)^n + 1 \pmod{11}$

$a_n \equiv 2 \times (-1)^n + 1 \pmod{11}$

Si n est paire $a_n \equiv 3 \pmod{11}$

Si n est impaire. $a_n \equiv -2 + 1 \pmod{11}$

$a_n \equiv 10 \pmod{11}$.

c/ On pose $d = a_n \wedge 11$.

Si n est paire :

$d \mid a_n - 11k$; $k \in \mathbb{Z}$

$d \mid \cancel{a_n} - 1$.

donc $d = 1$

Si n est impaire

$d \mid a_n - 11k$, $k \in \mathbb{Z}$

$d \mid 3$

donc $d \mid 3 \wedge 11$

$d \mid 11$

donc $d = 1$

Si n est pair, $a_n \equiv 3 \pmod{11}$

Si n est impair $a_n \equiv 10 \pmod{11}$

donc 11 est un nombre premier qui ne divise pas a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'où $a_n \wedge 11 = 1$.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$a_n \wedge 11 = 1$.

2) $(E) : a_2 x + 11 y = 1$.

$(E) : 201 x + 11 y = 1$.

a/ a_2 et 11 sont pre[...]

D'après l'identi[...]

(E) admet au moins une solution.

b) Si (x, y) solution de (E)

alors $a_2 x + 11 y = 1$.

ssi $a_2 x = 11 y + 1$.

donc $a_2 x \equiv 1 \pmod{11}$.

Or $a_2 \equiv 3 \pmod{11}$ (car 2 est pai[...]

donc $a_2 \cdot x \equiv 3x \pmod{11}$

Par suite $3x \equiv 1 \pmod{11}$

donc $4 \times 3x \equiv 4 \times 1 \pmod{[...]}$

$11x + x \equiv 4 \pmod{[...]}$

$x \equiv 4 \pmod{11}$.

c/ Si (x, y) est une solution de (E)

alors $x \equiv 4 \pmod{11}$

sig $x = 4 + 11k$; $k \in \mathbb{Z}$.

D'où $a_2 (4 + 11k) + 11 y = 1$.

ssi $4 a_2 + 11 (k a_2 + y) = 1$

" $11 (k a_2 + y) = 1 - 4 a_2$

" $11 (201 k + y) = 1 - 4 \times 201$

" $\cancel{11} (201 k + y) = -73 \times \cancel{11}$

" $201 k + y = -73$

" $y = -201 k - 73 = -a_2 k [...]$

Réciproquement, Si $\begin{cases} y = -a_2 k - 73 \\ x = 4 + 11k , k[...] \end{cases}$

alors $a_2 x + 11 y = a_2 (4 + 11k) - 11 (a_2 [...]$

$= 4 a_2 + \cancel{11 a_2 k} - \cancel{11 a_2 k} - 11[...]$

$= 804 - 803$

$= 1$.

D'où $S_{\mathbb{Z}^2} = \{ (4 + 11k, -201 k - 73) ; k \in [...]$

3) a/ Soit z / $z^4 = 16 \cdot e^{i\pi a_n}$; $n \in \mathbb{N}$.

On a : $z_k = \sqrt[4]{16} \cdot e^{i\frac{\pi a_n + 2k\pi}{4}}$; $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

d'où les racines $4^{\text{ème}}$ de $16 \cdot e^{i\pi a_n}$ sont :

$z_0 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi a_n}{4}}$

$z_1 = 2 \cdot e^{i\left(\frac{\pi a_n}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = i z_0$

$z_2 = 2 \cdot e^{i\left(\frac{\pi a_n}{4} + \pi\right)} = -z_0$.

$z_3 = -i z_0$.

Autre méthode : $z^4 = \left(2 e^{i\frac{\pi a_n}{4}}\right)^4$

$\left(\frac{z}{2e^{i\frac{\pi a_n}{4}}}\right)^4 = 1$

b/ Pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n\left(z_n = 2 \cdot e^{i\pi \frac{a_n}{4}}\right)$

On a $|z_n| = 2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Donc $A_n \in \mathcal{C}_{(O,2)}$

c/ Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$A_n \notin \{A_1 ; A_2\}$.

ssi $z_n \neq z_1$ et $z_n \neq z_2$.

Or $|z_n| = 2 = |z_1| = |z_2|$.

donc il faut que :

$\begin{cases} \arg(z_n) \neq \arg(z_1) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \\ \arg(z_n) \neq \arg(z_2) + 2k'\pi ; k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$

ssi $\begin{cases} \frac{\pi a_n}{4} \neq \frac{\pi a_1}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}. \\ \frac{\pi a_n}{4} \neq \frac{\pi a_2}{4} + 2k'\pi , k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$

ssi $\begin{cases} a_n \neq a_1 + 8k \\ a_n \neq a_2 + 8k' \end{cases}$; $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$

ssi $\begin{cases} 2 \cdot 10^n + 1 \neq 2 \cdot 10 + 1 + 8k , (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \\ 2 \cdot 10^n + 1 \neq 2 \cdot 10^2 + 1 + 8k' , \end{cases}$

ssi $\begin{cases} (10^n - 10) \neq 4k \\ (10^n - 100) \neq 4 \end{cases}$

or $A_{n \in \mathbb{N}^*} = A \in \{A_1, A_2\}$

$A_1 \in \{A_1 , A_2\}$

$A_2 \in \{A_1, A_2\}$

et pour $n \geq 3$, $10^n - 10^2 = 10^2(10^{n-2} - 1)$

Comme $4 \mid 10^2(10^{n-2} - 1)$

alors $4 \mid 10^n - 10^2$

D'où $10^n - 10^2 = 4k'$, $k' \in \mathbb{Z}$.

Absurde.

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$A_n \in \{A_1, A_2\}$

---

pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$a_n = 2 \cdot 10^n + 1 = 4 \times 2^{n-1} \times 5^n + 1$

donc $a_n \equiv 1 \pmod 4$.

$a_n = k \times 4 + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\arg(z_n) = \frac{\pi a_n}{4}$

$= \frac{\pi(4k+1)}{4}$

$= k\pi + \frac{\pi}{4}$

$\arg(z_n) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ ou $\arg(z_n) \equiv \frac{5\pi}{4}$

or $|z_n| = 2$.

D'où $z_n \in \left\{ z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} ; z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}} \right.$

$A_n(z_n) \in \{A_1(z_1), A_2(z_2)\}$

Ex 1

1) Si $57n \equiv 0 \pmod{2014}$

alors $57n = 2014k,\ k \in \mathbb{Z}$

ssi $3 \times \cancel{19}\, n = 2 \times \cancel{19} \times 53k,\ k \in \mathbb{Z}$

ssi $3n = 106k,\ k \in \mathbb{Z}$

alors $3n \equiv 0 \pmod{106}$

donc $-35 \times 3n \equiv 0 \pmod{106}$

" $-105n + 106n \equiv 0 \pmod{106}$

" $n \equiv 0 \pmod{106}$

Vrai

2) $(E) : 57x + 19y = 2014$.

Comme $57 = 3 \times 19$.

alors $57 \wedge 19 = 19 = d$.

Or $2014 = 19 \times 106$

donc $d \mid 2014$. D'après l'identité de Bezout

D'où (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

Vrai

3) $F(x) = \int_1^{\ln x} \frac{e^t}{1+t^2}\, dt \ ;\ x > 0$

a/ La fonction $x \mapsto \ln x$ est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.

Les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$.

D'où la fonction $t \mapsto \frac{e^t}{1+t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

D'où la définition, continuité et la dérivabilité de f sur $]0,+\infty[$.

pour $x > 0$,

$F'(x) = (\ln x)' \cdot \frac{e^{\ln x}}{1+(\ln x)^2}$

$= \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\ldots}$

D'où F est aussi croissante strictement sur $]0,+\infty[$.

Vrai.

b/ $U_n = f(e^n)$

$= \int_1^{\ln e^n} \frac{e^t}{1+t^2}\, dt$

$= \int_1^{n} \frac{e^t}{1+t^2}\, dt$.

pour $t \in [1,n]$, On a

$0 < 1 \leq 1+t^2 \leq 1+n^2$

$\frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

$\frac{e^t}{1+n^2} \leq \frac{e^t}{1+t^2} \leq e^t$.

donc $\frac{e^t}{1+n^2} \leq \frac{e^t}{1+t^2}$

Les fonctions $t \mapsto \frac{e^t}{1+t^2}$ et $t \mapsto \frac{e^t}{1+n^2}$ étant continues sur $[1,n]$

alors $\int_1^n \frac{e^t}{1+n^2}\, dt \leq \int_1^n \frac{e^t}{1+t^2}\, dt$

alors $\frac{1}{1+n^2} \cdot \left[e^t\right]_1^n \leq F(e^n)$

$\frac{e^n - e}{1+n^2} \leq U_n$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n - e}{1+n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n(1 - \ldots)}{n^2(\frac{1}{n^2} \ldots)}$

$= +\infty$

Car $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n^2} = +\infty. \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} + 1 = 1. \\ \lim_{n\to+\infty} 1 - e^{1-n} = 1 \end{cases}$

D'où (U_n) est divergente.

Faux

Ex 3)

1) On a $(\widehat{\overrightarrow{\Pi F},\overrightarrow{\Pi E}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{\Pi F},\overrightarrow{\Pi A}}) + (\widehat{\overrightarrow{\Pi A},\overrightarrow{\Pi B}}) + (\widehat{\overrightarrow{\Pi B},\overrightarrow{\Pi E}})$ $[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$

$\equiv \pi$ $[2\pi]$.

Car dans les carrés ΠKFA et ΠBEN, (ΠF) et (ΠE) portent les bissectrices des angles $(\overrightarrow{\Pi K}, \overrightarrow{\Pi A})$ et $(\overrightarrow{\Pi B}, \overrightarrow{\Pi N})$ qui sont droits.

D'où $\overrightarrow{\Pi F}$ et $\overrightarrow{\Pi E}$ sont colinéaires donc Π, E et F sont alignés.

2) $r_1 = R_{(A, \frac{\pi}{2})}$, $r_2 = R_{(B, \frac{\pi}{2})}$

a/ $r_2 \circ r_1$ est la composée de deux ~~symétries~~ déplacements ~~rotations~~ d'angle $\frac{\pi}{2}$ chacune.

Donc $r_2 \circ r_1$ est un déplacement d'angle $\pi \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

D'où $r_2 \circ r_1$ est une symétrie centrale.

~~Or $(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BJ}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}) \equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$~~

On a $O = I * J$.
$(AB) \perp (IJ)$ en O. $\}$ $(AB) = \text{med}[IJ]$.

or A et B appartiennent à $\mathcal{C}_{[IJ]}$

Donc AIJ et BJI sont isocèles rectangles directes.

D'où $\begin{cases} AI = AJ \\ (\widehat{\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AI}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ donc $r_1(J) = I$

$\begin{cases} BI = BJ \\ (\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BJ}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ donc $r_2(I) = J$.

D'où $r_1 \circ r_2(I) = r_1(J)$
$= I$.

Donc I centre de $r_1 \circ r_2$.

$\boxed{r_1 \circ r_2 = S_I}$

b/ $r_1 \circ r_2(E) = r_1(\Pi) = F$.
sig $S_I(E) = F$
...

Donc lorsque Π varie, la droite (EF) passe par F.

3) $S(O) = I$, $S(J) = B$.

a/ Soit k son rapport et α son angle

$k = \frac{BI}{OJ}$

Or BIJ isocèle rectangle en B.

Donc $BI^2 + BJ^2 = IJ^2$

ssi $2BI^2 = IJ^2$

ssi $\left(\frac{BI}{IJ}\right)^2 = \frac{1}{2}$

ssi $\frac{BI}{IJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ssi $\frac{BI}{2OJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$k = \frac{BI}{OJ} = \sqrt{2}$

et $\alpha \equiv (\widehat{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{IB}})$ $[2\pi]$

$\equiv (\widehat{\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IB}})$ $[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

b/ On a OAJ est isocèle rectangle direct en O.

Donc $S(O)S(A)S(J)$ est isocèle rectangle direct en $S(O)$

ssi $I\,S(A)\,B$ " " " en "

or IAB " " " "

D'où $S(A) = A$.

Donc A centre de S.

c/ $S = S_{(A, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4})}$

$A\Pi KF$ est un carré.

donc $\begin{cases} AK = \sqrt{2}\, A\Pi \\ (\widehat{\overrightarrow{A\Pi},\overrightarrow{AK}}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$

d'où $S(\Pi) = K$.

4) a/ $G = S(F)$

donc $\begin{cases} AG = \sqrt{2}\, AF \\ (\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG}}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$

b/ On a $\begin{cases} (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}) \equiv \frac{\pi}{4} \ [2\pi] \\ AG = \sqrt{2} . AF \end{cases}$

~~$\sin(\widehat{\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GA}})$~~

~~On a~~ Dans le triangle AFG, en appliquant la relation d'El Kashi :

$GF^2 = AF^2 + AG^2 - 2 . AF . AG . \cos\frac{\pi}{4}$

$= AF^2 + 2AF^2 - \cancel{2}\sqrt{2} . AF^2 . \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}$

$= AF^2.$

Donc $AF = GF$.

" AFG isocèle en F.

d'où $A\hat{F}G = \pi - F\hat{A}E - A\hat{G}F$

$= \pi - 2 . \frac{\pi}{4}$

$= \frac{\pi}{2}$

donc $\left.\begin{array}{l}(AF) \perp (FG) \\ (FK) \perp (AF)\end{array}\right\}$ F, G et K sont alignés

or

Comme $FA = GF = FK$

alors $F = G * K$.

Autre méth.

On pose O' centre de AMKF.

On a $AO' = \frac{1}{2} . AK$

$= \frac{1}{2} . \sqrt{2} . AF.$

donc $\begin{cases} AF = \sqrt{2} . AO'. \\ (\overrightarrow{AO'}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{4} \ [2\pi] \end{cases}$

or

donc $S(O') = F$.

On a $O' = M * F$.

donc $S(O') = S(M) * S(F)$

ssi $F = K * G$.

c/ Lorsque M varie, On a :

$I \in (MF)$

donc $S(I) \in S((MF))$

Comme $\left.\begin{array}{l} S(M) = K \\ S(F) = G \end{array}\right\}$ $S((MF)) = (KG)$

d'où ~~$S(I) \in$~~

D'où (KG) varie autour du point fixe $P = S(I)$.

5) $f = S_{ind}$ / $f(B) = O$
$f(I) = B.$

a/ On a $k = \frac{OB}{BI} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \neq 1$

~~$f(B)$ est $f(I)$~~

IBJ est rectangle isocèle en B ind

donc $f(I)f(B)f(J)$ " " " $f(B)$ "

ssi $B . O . f(J)$ " " " O "

or BOJ " " " O "

D'où $J = f(J)$

$f \circ f = h_{(J, \frac{1}{2})}$

donc J centre de f.

Comme $f(B) = O$, alors son axe Δ porte la bissectrice interne de $(\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{J}$

b/ ~~$f \circ S$ est la composée de deux sim~~

$f \circ S = S_{ind(J, \frac{1}{\sqrt{2}}, \Delta)} \circ S_{d(A, \sqrt{2},}$

Donc $f \circ S$ est un antidéplacement

$\left.\begin{array}{l} f \circ S(O) = f(I) \\ \quad = B \\ f \circ S(J) = f(B) \\ \quad = O. \end{array}\right\}$ $(f \circ S) \circ (f \circ S)(J) =$
$\neq J$

alors $f \circ S$ n'est pas une Sym. orthogonale ~~translation~~, donc une Sym. glissée

$(f \circ S) \circ (f \circ S)(J) = f \circ S(O)$

$= B.$

donc $t_{2\vec{u}}(J) = B$

$\vec{u} = \frac{1}{2} \overrightarrow{JB}.$

Comme $f \circ S(O) = B$ donc $I_1 = O * B \in \Delta'$

$f \circ S(J) = O$ " $I_2 = J * O \in \Delta'$.

D'où $\Delta' = (I_1 I_2)$.

avec Δ' l'axe de $f \circ S$.

$$f \circ S = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{JB}} \circ S_{(I_1 I_2)} = S_{(I_1 I_2)} \circ t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{JB}}.$$

Ex 4)

1) $(P) = \{M(x,y) \in P \,/\, y^2 - 4y - 4x = 0\}$

$(\mathscr{C}) = \mathscr{C}_{(O,2)}$.

On pose $M(x,y) \in (P)$

ssi $y^2 - 4y - 4x = 0$.

ssi $(y-2)^2 - 4 = 4x$.

$(y-2)^2 = 2 \times 2 \times (x+1)$.

Soit $S(-1,2)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

$M(x,y)_{(O,\vec{i},\vec{j})}$

et $M(X,Y)_{(S,\vec{i},\vec{j})}$

$\overrightarrow{SM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}_{(O,\vec{i},\vec{j})}$ et $\overrightarrow{SM}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{(S,\vec{i},\vec{j})}$

donc $\begin{cases} x+1 = X \\ y-2 = Y \end{cases}$

Dans le repère $(S,\vec{i},\vec{j})$,

(P): $Y^2 = 2 \times 2 . X$

Donc (P) est une parabole de paramètre $|2| = 2$

Donc son Foyer est $F(\frac{2}{2}, 0)$

et sa directrice D: $X = \frac{-2}{2} = -1$

Comme $\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y-2 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x = X-1 \\ y = Y+2 \end{cases}$.

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$:

(P) est une parabole de paramètre 2,

de foyer $F(0,2)$

de directrice D: $x = -2$.

On a $OF = \sqrt{0^2+2^2}$

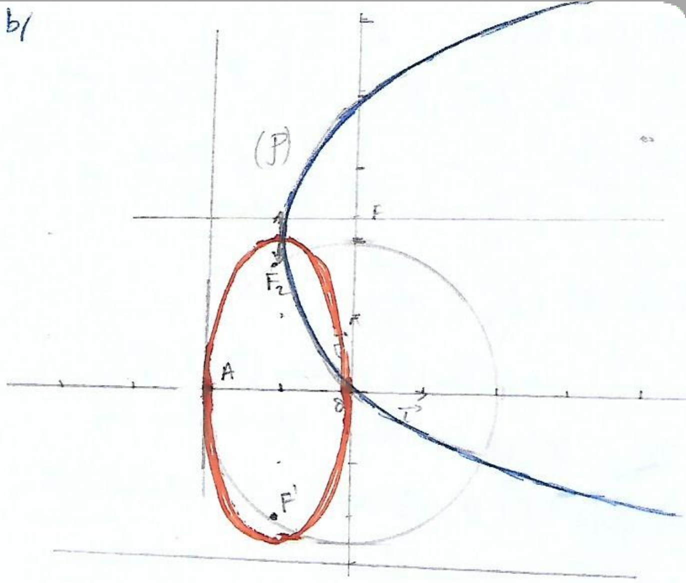
$= 2$.

donc $F \in (\mathscr{C})$.

b/ $y_0^2 - 4y_0 + 4x_0 = 0^2 - 4\times 0 + 4\times 0$

donc ...

b/



3) a/ On pose $F(a,b) \,/\, (a,b) \neq (-2,0)$.

" " $M(x,y)$

et " " H son projeté orthogonal sur

D: $x = -2$.

On a $H(-2,y)$.

(P) est une parabole de foyer F et de directrice D donc

$M \in (P)$ ssi $\frac{MF}{MH} = 1$.

ssi $\frac{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}{\sqrt{(x+2)^2}} = 1$

ssi $(a-x)^2 + (b-y)^2 = (x+2)^2$

ssi $(y-b)^2 = (x+2)^2 - (x-a)^2$

" $(y-b)^2 = (x+2-x+a)(x+2+x$

" $(y-b)^2 = (2+a)(2x+2-a)$.

b/ Le sommet de cette parabole est: $S(-1+\frac{a}{2}; b$

$M(x,y) \in (E)$ ssi $\begin{cases} x = -1+\frac{a}{2} \\ y = b \end{cases}$

ssi $(x+1)^2 + \frac{1}{4}y^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$

$= \frac{1}{4}(a^2+b^2)$

$= 1$

Car $a^2+b^2 = 2^2$ $(F(a,b) \in \mathscr{C}_{(0,2)})$.

... $M(x,y) \in (E)$ ssi $(x+1)^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$.

... $(-1,0)$ dans le ...

$S'M \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}_{(O,\vec{i},\vec{j})}$ et $S'M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{(S',\vec{i},\vec{j})}$

donc $\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y. \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x = X-1 \\ y = Y \end{cases}$

d'où (E): $\dfrac{X^2}{1^2} + \dfrac{Y^2}{2^2} = 1.$

Comme $2 > 1$, Dans le repère $(S',\vec{i},\vec{j})$;

Donc (E) est une ellipse de centre S',

de foyer $F'(0, \sqrt{3})$. d'excentricité

$e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et de directrice d'équation

D': $y = \dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ * Fait ne donner 2 foyers Directrices

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$;

(E) est l'ellipse de centre $S'(-1,0)$,

d'excentricité $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e$.

De foyer $F'(-1,\sqrt{3})$.

de directrice D': $y = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \simeq 2,3$.

4) Soit $\mathcal{D}$: $x^2 + 2x = \dfrac{y}{4} \cdot |y|$.

* Si $y \leq 0$, $|y| = -y$.

donc $\mathcal{D}_1$: $(x+1)^2 - 1 = -\dfrac{y^2}{4}$

ssi $\mathcal{D}_1$: $(x+1)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

D'où $\mathcal{D}_1 = (E)_1 \subset (E)$

* Si $y \geq 0$, $\mathcal{D}_2$: $x^2 + 2x = \dfrac{y^2}{4}$.

ssi $\mathcal{D}_2$: $(x+1)^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

On pose $S'M \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}_{(O,\vec{i},\vec{j})}$ et $S'M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{(S',\vec{i},\vec{j})}$

On a $\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x = X-1 \\ y = Y. \end{cases}$

$\mathcal{D}_2$: $\dfrac{X^2}{1^2} - \dfrac{Y^2}{2^2} = 1.$

Repère	$(S',\vec{i},\vec{j})$	$(O,\vec{i},\vec{j})$
foyers	$F_1(\sqrt{5},0)$, $F_2(-\sqrt{5},0)$	$F_1(\sqrt{5}-1)$, F_2
directrices	D_1: $x = \dfrac{1^2}{\sqrt{5}}$; D_2: $x = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$	D_1: $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}} - 1$ D_2: $x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} - 1$
excentricité	$\sqrt{5}/2$	
sommets	$S(1,0)$ et $S'(-1,0)$	$S(0,0)$ et $S'(-$
asymtotes	$y = 2X$ $y = -2X$	$y = 2x+2$ $y = -2x-2$

$\mathcal{D}_2 = (H_1) \subset (H)$.

d'où $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$

$= (E_1) \cup (H_2)$