Exercice 1.

Soient α un nombre complexe et (E) l'équation d'inconnu le nombre complexe z telle que : $z^3+\alpha z^2-\overline{\alpha}\, z-1=0$

1) Soient z_0, z_1 et z_2 les solutions de (E)
   a) Montrer que $z_0 z_1 z_2=1$ et déterminer $z_0+z+_1z_2$
   b) Montrer que si z est solution de (E) alors $\frac{1}{z}$ est solution de (E)
   c) En déduire que (E) admet au moins une solution de module 1
2) Dans cette question, on suppose que $\alpha=e^{i\theta}$.
   θ est un réel quelconque.
   a) Vérifier que $(-\alpha)$ est une solution de (E)
   b) Résoudre l'équation (E)
3) Soit n un entier naturel non nul.
   Résoudre l'équation $(E'): 2z^{3n}+\left(1+i\sqrt{3}\right)z^{2n}-\left(1-i\sqrt{3}\right)z^{n}-2=0$

Exercice 2

n et p sont deux entiers naturels.

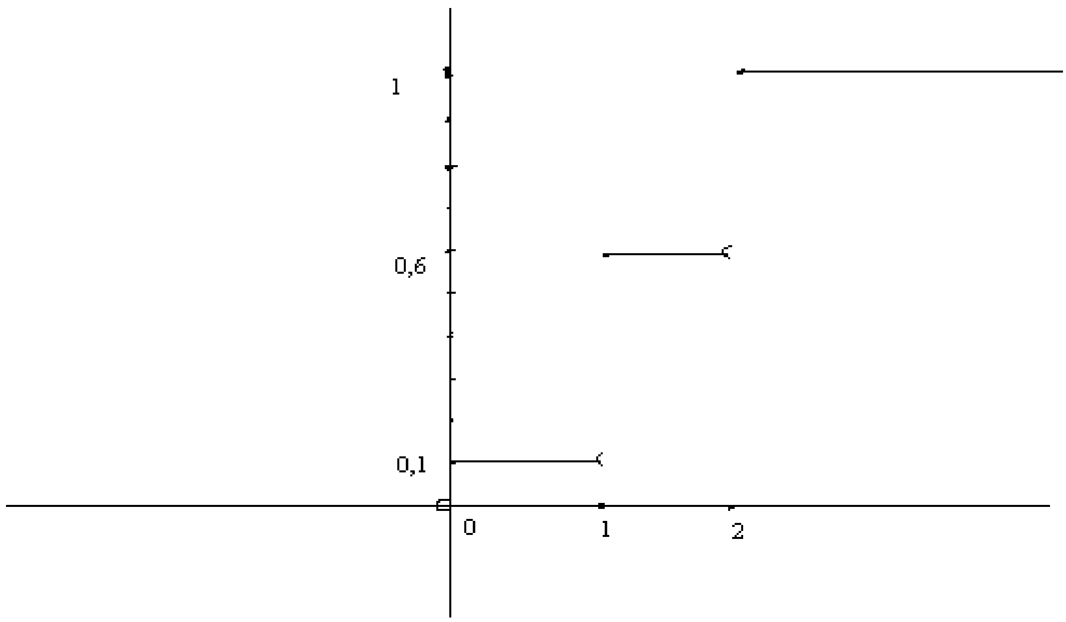
Soit l'équation (E) d'inconnus n et p telle que : $7^n-3\text{x}2^p=1$

1) Montrer que $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$.
2) Soient n et p les solution de (E) tel que : $p\le 4$.
   Déterminer les valeurs possibles de n
3) Soient n et p les solution de (E) tel que $p\ge 5$
   a) Montrer que $7^n\equiv 1 \bmod 32$
   b) Montrer que $n\equiv 0 \bmod 4$
   c) En déduire que $7^n\equiv 1 \bmod 5$.
4) Existe-t-il des entiers naturels non nuls n et p telle que : $2\sum_{k=0}^{n-1}7^k=\sum_{k=0}^{p}C_p^k$.

Exercice 3.

1) Dans une station-service, le nombre de clients se présentant en cinq minutes est une variable aléatoire X dont on donnera la courbe de sa fonction de répartition.

Courbe de la fonction de répartition de X



a) Déterminer $P[X \leq -1]$, $P[0{,}5 \leq X \leq 1{,}5]$, $P[X \geq 1]$, $P[X \geq \frac{4}{3}]$, $P[X = 2]$

b) Donner la loi de probabilité de X et déterminer sa variance

2) Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est de 0,7 ; celle qui achète du gazole est 0,3.

Son choix est indépendant de celui des autres clients.

On considère les évènements suivants :

- C_1 : en cinq minutes un seul client se présente.
- C_2 : en cinq minutes deux clients se présentent.
- E : en cinq minutes, un seul client achète de l'essence.

a) Calculer $P(C_1 \cap E)$.

b) Montrer que $P(E / C_2) = 0{,}42$

c) En déduire $P(C_2 \cap E)$

d) Déterminer la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence

4) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y

b) Déterminer l'écart type de Y

c) Déterminer et construire la fonction de répartition de Y

Exercice 4.

Soit t un réel de $[0;\pi]$ et f_t la fonction définie par $f_t(x)=\ln\left(x^2-2x\cos t+1\right)$.

On appelle Γ_t la représentation graphique de f_t dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) a) Déterminer, suivant les valeurs de t, le domaine de définition de f_t.

b) Montrer que la droite d'équation $x=\cos t$ est un axe de symétrie de Γ_t

c) Montrer que Γ_t et $\Gamma_{\pi-t}$ sont symétriques par rapport à la droite $\left(O;\vec{j}\right)$

d) t et t' étant deux réels distincts de $[0;\pi]$. Déterminer $\Gamma_t \cap \Gamma_{t'}$

2) a) Etudier les variations de f_0 et tracer Γ_0. En déduire Γ_π

b) Quand $t\in]0;\pi[$, étudier les variations de f_t. Tracer $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ et $\Gamma_{\frac{2\pi}{3}}$.

3) Soit n un entier naturel non nul.

a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $(E_n): z^{2n}-1=0$.

On notera z_k les solutions de (E_n) où $k\in I=\{0,1,2...2n-1\}$.

b) Soit k un entier appartenant à I et distinct de 0 et n.

Soit l'entier k' tel que $k+k'=2n$.

A quel ensemble appartient-il k' ?

c) Monter que le polynôme $P(z)=\left(z-z_k\right)\left(z-z_{k'}\right)$ a des coefficients réels que l'on déterminera en fonction de k et n.

d) En déduire que $z^{2n}-1$ peut s'écrire sous la forme d'un produit de polynômes de degrés inférieur ou égal 2 à coefficients réels.

4) On considère la fonction $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n-1} f_{\frac{k\pi}{n}}(x)$ où x un réel quelconque.

a) Montrer que la fonction S_n est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que si $|x|\neq 1$, $S_n(x)=\ln\left(\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right)$.

c) En déduire $S_n(1)$ et $S_n(-1)$.

5) x étant un réel fixé et tel que $|x|\neq 1$.

On pose $g_x(t)=f_t(x)$ où $t\in[0;\pi]$. Soit $I(x)=\int_0^{\pi}\ln\left(x^2-2x\cos t+1\right)dt$.

a) Monter que $I(x)$ existe sur $[0;\pi]$.

b) Etudier les variations de la fonction g_x sur $[0;\pi]$.

6) Dans cette question, on prendra $x\geq 0$ et $x\neq 1$. $n\in N^*$

a) Montrer que $\frac{\pi}{n}\left(g_x\left(\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right)\leq\int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} g_x(t)dt\leq\frac{\pi}{n}\left(g_x\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$

b) Montrer que $\frac{\pi}{n}\left(\ln(x-1)^2+S_n(x)\right)\leq I(x)\leq\frac{\pi}{n}\left(\ln(x+1)^2+S_n(x)\right)$

7) Donner un encadrement de $S_n(x)$ pour tout réel x distinct de -1 et 1.

8) Montrer que la suite (T_n) définie sur N^* par $T_n=\frac{S_n(x)}{n}$ est convergente.