Lycée Pilote de Sfax A/S 2020-2021	Série de révision N°4	Mr : Mourad EL arbi 4ème Math

1 Pour tout entier naturel non nul, on considère dans $\mathbb{Z}$ le système $(S_n):\begin{cases} x \equiv 0\left(\bmod 5^n\right) \\ x \equiv 1\left(\bmod 2^n\right)\end{cases}$

① Montrer que si x est une solution de (S_n) alors :

a) x^2 est une solution de (S_{n+1}).

b) $x^2 \equiv x\left(\bmod 10^n\right)$.

② Soit $a_n = 5^{2^{n-1}}$. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, a_n est une solution de (S_n).

③ a) Trouver un entier naturel p tel que p et p^2 ont les mêmes chiffres respectifs des unités, des dizaines et des centaines.

b) En déduire les solutions de (S_3).

2 Lors d'une compétition de saut en longueur, les athlètes doivent réaliser des sauts de plus de 7 mètres pour se qualifier. Un saut mordu (le pied de l'athlète touche la planche du sautoir) est annulé.

Pendant les compétitions précédentes on a remarqué que 20% des sauts sont mordus et 50% des sauts non mordus dépassent 7 mètres. De plus 14% des sauts sont mordus et dépassent 7 mètres.

① Un athlète effectue un saut.

a) Montrer que la probabilité qu'un athlète soit qualifié est égale à $\frac{2}{5}$.

b) Calculer la probabilité que le saut de l'athlète dépasse 7 mètres.

② Un athlète a fait un saut de 7 mètres. Quelle est la probabilité que le saut soit mordu.

③ Chaque athlète a droit à trois essais. Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'athlète se qualifié grâce au $k^{\text{ème}}$ essai où $k \in \{1,2,3\}$ et X prend la valeur 4 s'il ne se qualifie pas.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X.

c) Représenter la fonction de répartition F associé à la variable aléatoire X.

③ Un groupe de n athlètes participent à la compétition.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes qualifiés.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) Calculer l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire Y.

c) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité qu'au moins un athlète est qualifié soit supérieure à 0.99

3 Soit ABCD un carré de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Les points I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$.

① a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que $R(A) = B$ et $R(B) = C$.

b) Caracteriser R.

② Soit $f = r_{\left(B, \frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_A$, $T = f \circ R$.

Caractériser f et T.

③ Soit $\left(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}\right)$ un repère orthonormé du plan.

On considère les points H le projeté orthogonal de A sur (DI), $J' = T(J)$, $E = f(H)$ et $F = R(H)$.

a) Donner l'écriture complexe de f et celle de R.

b) Déterminer l'affixe de H.

c) En déduire Z_E et Z_F les affixes respectives de E et F.

d) Montrer que E, J' et B

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$.

On désigne par C_n la courbe de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

① a) Calculer $f'_n(x)$ pour tout réel x.

b) Dresser le tableau de variation de f_n.

② Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution notée α_n dans $]0,1[$.

③ Déterminer la position relative de C_{n+1} et C_n.

④ a) Déterminer la nature des branches infinies de C_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Tracer C_1 et C_2.

⑤ a) Montrer que la suite (α_n) est croissante puis quelle est convergente.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(\alpha_n) = -\dfrac{\alpha_n}{2n+1}$

c) Calculer alors la limite de la suite (α_n).

5 A/ Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\left(1+\ln^2(x)\right)x}$

On désigne par C_f la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 2 cm)

① a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[, f'(x) = -\left(\dfrac{1+\ln x}{\left(1+\ln^2(x)\right)x}\right)^2$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que C_f coupe la droite $\Delta : y = x$ en un seul point à préciser.

(On admet que ce point est un point d'inflexion de C_f).

d) Tracer C_f.

② a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J à péciser.

b) Tracer la courbe $C_{f^{-1}}$ de la fonction f^{-1} réciproque de f.

③ Soit g la fonction définie sur $\left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = e^{\tan x}$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer $h'(x)$ en fonction de x.

c) Calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par C_f, $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{e}$, $x = \dfrac{e}{2}$ et $y = 0$.

II/ On pose $I_0 = \int_1^e f(x)\,dx$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_1^e f(x)(\ln x)^{2n}\,dx$

① a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2(2n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{2n+1}$.

b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

② a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

③ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = (-1)^n I_n - \dfrac{\pi}{4}$.

b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.