

Exercice :1

Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Soit ABCD un carré direct de centre O.

On considère l'application $f = S_{AC} \circ t_{\vec{AB}}$

Déterminer $f(A)$ et $f(D)$. En déduire que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

2) Soit g une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que

$$g(1) = \frac{-1}{4} \text{ et } g'(1) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(\pi g(x)) + 1}{x-1}$$

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x)$

Exercice :2

Dans le plan complexe rapporté à un repère

orthonormé direct (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) , on donne les points A, B et C d'affixes respectives $1 + i$, $1 + 2i$ et $2 + 2i$.

Soit φ l'application du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' ,

défini par $-2\vec{M'A} + \vec{M'M_1} = \vec{0}$ où M_1 est le symétrique de M par rapport à l'axe des réels.

1°) Montrer que OICB est un parallélogramme de centre A.

2°) a) Montrer que $z' = -\bar{z} + 2 + 2i$

b) Donner la nature de φ .

3°) a) Montrer que $\varphi = S_A \circ S_{OI}$ où S_A désigne la symétrie centrale de centre A.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de φ .

Exercice 3 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$(E) : z^2 - iz(1 - e^{i\theta} \cos\theta) + e^{i\theta} \cos\theta = 0, \theta \in \mathbb{R}$$

2) On considère les points A, B et M d'affixes

$$\text{respectives } i, \frac{i}{4} \text{ et } \frac{1}{i + \tan(\theta)}, \theta \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [.$$

On note N le milieu du segment [AM].

a) Montrer que $z_N = \frac{1}{4}(\sin(2\theta) + 2i \sin^2(\theta))$.

b) Prouver que, lorsque θ varie dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$,

le point N varie sur le cercle Γ de centre B et de rayon $R = \frac{1}{4}$ privé d'un point à déterminer.

c) En déduire l'ensemble des points M, lorsque θ varie dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.

d) Ecrire z_M sous forme exponentielle.

Exercice :4

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} par : $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_n = \frac{7}{u_n}$$

1°) Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} , $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

2°) a) Démontrer que quel que soit n de \mathbb{N} ,

$$(u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2$$

b) En déduire que quel que soit n de \mathbb{N} ,

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2.$$

c) Conclure que quel que soit n , on a : $u_n - v_n \geq 0$.

3) a) Prouver que la suite (u_n) est décroissante

b) En déduire que la suite (v_n) est croissante.

4) a) En s'aidant de la question 2.c et de la question 3.b, démontrer que pour tout entier naturel non nul n ,

$$u_n \geq \frac{21}{8}.$$

b) Utiliser le résultat précédent et le résultat de 2.b pour démontrer que pour tout n de \mathbb{N} ,

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2$$

c) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout n de \mathbb{N} , $u_n - v_n \leq \frac{1}{10 \cdot 2^{n-1}}$

d) Déduire la limite de $u_n - v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5°) Conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

Exercice : 5

Répondre par vrai ou faux

1) n est un entier naturel ayant pour écriture $aba7$ en base dix.

n est divisible par 7 $\Leftrightarrow a + b \equiv 0 \pmod{7}$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) = 0$$

3) Soit a et b deux entiers tels que $4a + 3b = 5$ alors $\text{pgcd}(a, b) = 5$.

4) Si un entier n est divisible par 4 et par 6 alors il est divisible par 12.

Exercice :6

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC isocèle en A tel que $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

Soit O le centre du cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle ABC, I le milieu du segment [BC], J le milieu du segment [AB] et L le milieu du segment [AC]

1) Montrer que OBAC est un losange.

2) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(B) = A$.

b) Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

$$c) \text{ Montrer que } f = R_{(O, \frac{-\pi}{3})} \circ S_{AB}.$$

d) Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de $R_{(O, \frac{\pi}{3})} \circ t_{\frac{1}{2}\vec{BC}}$.

3°) Soit l'isométrie $\varphi = S_{BC} \circ S_{AC} \circ S_{AB}$.

a) Montrer que $S_{AC} \circ S_{AB} = S_{AO} \circ S_{AC}$.

En déduire que $\varphi = S_{IK} \circ S_{IJ} \circ S_{AC}$. où K est le projeté orthogonal de I sur (AC).

b) Montrer alors que φ est une symétrie glissante dont précisera l'axe et le vecteur.

4°) Soit g une isométrie du plan qui laisse globalement invariant le triangle ABC.

a) Montrer que g fixe le point O.

b) Montrer que $g([BC]) = [BC]$.

c) Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABC.

Exercice :7

Pour tout $n \geq 1$, $I_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{1-t} dt$, $x \in \mathbb{R}$

1) Calculer $I_1(x)$

2) a) En intégrant $I_n(x)$ par parties,

Calculer $I_{n+1}(x) - I_n(x)$, ($n \geq 1$)

b) Dédire que $I_n(x) = e - (1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}) e^{1-x}$.

3) On suppose maintenant que x est un élément fixé de $]0, 1]$

a) Démontrer que, pour tout $n > 0$,

$$0 \leq I_n(x) \leq \frac{1}{n!} e (1 - e^{-x})$$

b) Dédire alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x)$

c) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{x^k}{k!}\right) = e^x$.

Exercice : 8

l) On considère, dans IC, l'équation ;

$$(E) : z^2 - e^{i\theta} z - i + e^{-i2\theta} = 0, \theta \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right[$$

1) Développer $(e^{i\theta} + 2ie^{-i\theta})^2$

2) Résoudre dans IC l'équation (E)

II) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les points A, M et N d'affixes respectives :

$$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{4}}; z_M = e^{i\theta} + ie^{-i\theta} \text{ et } z_N = -ie^{-i\theta}.$$

1) Déterminer la forme exponentielle de z_M .

2) Montrer que M décrit le segment [OA] privé des points O et A, lorsque θ varie.

3) Déterminer et construire l'ensemble γ des points N lorsque θ varie.

4) Soit H le point d'affixe $z_H = -\frac{z_M}{2}$.

a) Vérifier que $z_N - z_H = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

b) Montrer que H est le projeté orthogonal de N sur (OA).

c) Déterminer θ pour que l'aire du triangle OMN soit maximale.

Exercice 9:

1°) On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :

$$(E) : z^2 + (\sqrt{3} + 7i)z - 4(3 - i\sqrt{3}) = 0.$$

On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E) telles que $\text{Re}(z_1) < \text{Re}(z_2)$.

a) Sans résoudre l'équation (E), Montrer que :

$$|z_1 z_2| = 8\sqrt{3} \text{ et } \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$$

b) M que $(\sqrt{3} - i)^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$.

c) Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation (E).

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on donne les points A, B et C d'affixes respectives

$$a = -2i, b = -\sqrt{3} - 3i \text{ et } c = -4i.$$

a) Déterminer la forme exponentielle de b.

b) Placer les points A, B et C.

c) Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$\arg(z + 2i) \equiv \frac{-2\pi}{3} [2\pi].$$

d) Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z+4i}{z+2i}$ soit imaginaire.

Exercice 10:

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$f(x) = (1-x)e^{2x}$. On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le plan rapporté un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1°) Dresser le tableau de variation de f .

2°) a) Montrer que \mathcal{C} admet un point d'inflexion I qu'on précisera.

b) Donner une équation cartésienne de la tangente T à \mathcal{C} au point I.

c) Tracer T et \mathcal{C} .

3) Calculer l'aire du domaine limité par \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

4°) On pose $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x} dx$; $\forall n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

a) M que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^2}{1+n}$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

b) M que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $2I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$

5°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{2^n}{n!} I_n$.

a) M par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \leq \frac{2e^2}{(n+1)!}$.

a) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

6°) a) M que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + u_n$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \frac{1}{2} \left[e^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \right]$$

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!}$

Exercice 11 :

A) Soit la fonction f définie sur $]-1, 1[$ par :

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dt$$

1) a) Justifier l'existence de f .

b) Prouver qu'il existe trois réels α, β et φ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}, \frac{t^2}{1-t^2} = \alpha + \frac{\beta}{1-t} + \frac{\varphi}{1+t}$$

c) Déduire que $\forall x \in]-1, 1[, f(x) = -x + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

2) Etudier les variations de f et construire sa courbe C dans un repère orthonormé.

3) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\ln(x) \leq -1 + \frac{x}{k} + \ln k$$

b) Déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-1}^{\frac{1}{2}+k} \ln x dx \leq \ln k$.

$$\text{et que } \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+n} \ln x dx \leq \ln(n!)$$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(n!) \geq \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2} \ln 2$$

4) Soit la suite u définie par sur \mathbb{N}^* par :

$$u_n = n + \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n)$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \frac{1}{2} \ln 2$,

b) Vérifier que $\forall n \geq 1$, on a : $u_n - u_{n+1} = (2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$

c) Déduire que la suite u est convergente.

B) Soit (v_n) la suite définie par :

$$v_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \int_0^1 x^{n/2} \sqrt{1-x} dx$$

1) Calculer v_0

2) a) Définir l'ensemble des points

$$M(x, y) \text{ tel que } y^2 - x(1-x) = 0.$$

b) Déduire que $v_1 = \frac{\pi}{8}$

3) a) Prouver que la suite (v_n) est décroissante.

b) Déduire que la suite v est convergente.

4) a) Prouver par une intégration par partie que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \frac{n+2}{n+5} v_n$$

b) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+2}{n+5} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$

Exercice 12 :

I/ Soit x un réel de $]-1, +\infty[$, on pose $\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt$

1) a) $x \in \mathbb{R}_+$, mque, $0 \leq \varepsilon(x) \leq \frac{x^3}{3}$

b) $x \in]-1, 0]$, mque $\frac{x^3}{3(1+x)} \leq \varepsilon \leq 0$

c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(x)}{x^2} = 0$

2) a) Démontrer que pour tout x de $]-1, +\infty[$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x)$$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

3) Soit f la fonction numérique à variable réelle

définie sur $]-1, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

a) Mque f est continue et dérivable sur $]-1, +\infty[$

b) Etudier les variations de la fonction h définie sur

$$]-1, +\infty[\text{ par } h(x) = x - (x+1)\ln(1+x)$$

En déduire le signe de $h(x)$ pour $x \in]-1, +\infty[$

c) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère

orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

II/ Soit $x \in]-1, 0]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varepsilon_n = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$

1) Etudier le signe de $\varepsilon_n(x)$ suivant n est pair ou impair.

b) Etudier le signe de $\varepsilon_n(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(x+1)}$,

en déduire que $|\varepsilon_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(x+1)}$

2) a) Mque $\forall t \neq -1$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$$

b) En déduire que $\forall x$ de $]-1, 0]$ et pour tout n de \mathbb{N}^*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \varepsilon_n(x)$$

3) On considère la suite u définie par :

$$u_n = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} + \dots + \frac{1}{n.2^{n-1}} \right]$$

Trouver $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

Exercice 13 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct (O, u, v) . Soit $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$

2) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 2i, z_B = (1+i)e^{i\alpha}$ et $z_C = (1-i)e^{i\alpha}$.

a) Écrire z_B et z_C sous forme exponentielle.

b) En déduire que le triangle OBC est rectangle isocèle en O .

c) Pour quelle valeur de α le quadrilatère $OABC$ est-il un parallélogramme ?

3) À tout point $M(z)$ on associe le point $M'(z')$ tel que $z' = 2 + (z-2)^2$

On note C le cercle de centre $K(2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

a) Déterminer z' pour $z = z_A$.

b) Soit M le point de C d'affixe $z = 2 + \sqrt{2} e^{i\alpha}$

Montrer que l'affixe de M' est $2 + 2 e^{i2\alpha}$

Déterminer et construire, l'ensemble des

points M' lorsque α varie dans $[0, \frac{\pi}{2}]$

4) Soit N le point d'affixe $z_N = 2 + \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2}$

et N' le point associé à N.

a) Écrire $z_N - 2$ sous forme exponentielle; en déduire que N est un point de C.

b) Montrer que : $(\vec{u}, \overrightarrow{KN'}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

c) Placer N sur la figure puis construire le point N'.

Exercice 14 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}).

1) a) Montrer que f est définie sur $[1, +\infty[$.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement.

2) a. Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b. Tracer la courbe (C).

4) a. Montrer que f est bijective et tracer, dans le même repère, la courbe (C') de sa fonction réciproque f^{-1} .

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

5) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives: $x = 1$ et $x = 2$.

Exercice 15 :

On considère la suite définie sur \mathbb{N}^* par

$$u_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx.$$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$.

b) Montrer que U est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2) a) En intégrant par parties, calculer u_1 .

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - (n+1)u_n = \frac{-1}{e}$$

c) En déduire la valeur de u_2 .

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{ne}$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 16:

1) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = a \ln^2(x) + b \ln x; \text{ a et b deux réels.}$$

Déterminer les réels a et b sachant que h admet un minimum en $e^{\frac{1}{2}}$ égale à $(\frac{-1}{4})$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$f(x) = \ln^2 x - \ln x$. On désigne par C la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}).

a- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b- Montrer que tout $x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{-1 + 2 \ln x}{x}$.

c- Dresser le tableau de variation de f.

d- Préciser les points d'intersection de c avec l'axe des abscisses.

e- Tracer la courbe c.

(On précisera les branches infinies).

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]0, e^{\frac{1}{2}}]$.

a- Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g.

b- Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans I une unique solution α et que $\alpha \in]0, 1]$.

c- Tracer la courbe c' de g^{-1} dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}).

d- Montrer que tout $x \in J$; $g^{-1}(x) = e^{\frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{4}}}$.

4) Soit $A = \int_{\alpha}^1 f(x) dx$.

a- Interpréter graphiquement A

b- Calculer A.

c- En déduire la valeur de $K = \int_0^{\alpha} e^{-\sqrt{x + \frac{1}{4}}} dx$.

Exercice :17

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

Soit O le centre du cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle ABC, I le milieu du segment [BC], J le milieu du segment [AB] et L le milieu du segment [AC]

1°) Montrer que OBAC est un losange.

2°) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(B) = A$.

a) Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

b) Montrer que. $f = R_{(O, \frac{-\pi}{3})} \circ S_{AB}$

b) Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de $R_{(O, \frac{\pi}{3})} \circ t_{\frac{1}{2} \overrightarrow{BC}}$

3°) Soit l'isométrie $\varphi = S_{BC} \circ S_{AC} \circ S_{AB}$.

a) Montrer que $S_{AC} \circ S_{AB} = S_{AO} \circ S_{AC}$.

En déduire que $\varphi = S_{IK} \circ S_{IJ} \circ S_{AC}$ où K est le projeté orthogonal de I sur (AC).

b) Montrer alors que φ est une symétrie glissante dont précisera l'axe et le vecteur.

- 4°) Soit g une isométrie du plan qui laisse globalement invariant le triangle ABC.
- Montrer que g fixe le point O.
 - Montrer que $g([BC]) = [BC]$.
 - Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABC.

Exercice 18 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit $A(i)$ et $B(i+1)$.

On considère l'application

$$f: P \setminus \{A\} \rightarrow P : M(z) \rightarrow M'(z') \text{ tel que } z' - i = \frac{z}{z+i}$$

- Montrer que les points A, M et M' sont alignés.
- Déterminer l'ensemble ζ des points invariants par f
- Dans cette question, on suppose que $z=1+i+e^{i\theta}$

- Déterminer et construire l'ensemble Γ décrit par le point M d'affixe z lorsque θ décrit $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- Montrer que $z' - i = 1 + i \tan \frac{\theta}{2}$.
- En déduire l'ensemble Γ' image de Γ par f . Le construire.

Exercice 19 : (5 points)

Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2} dt \text{ si } x > 0 \text{ et } F(0) = -\ln 2$$

- Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel $x > 0$,

$$F(x) = \frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

- Montrer que pour tout réel $x > 0$,

$$e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$.

En déduire que F est continue à droite en 0.

- Montrer que pour tout réel $x > 0$, $F(x) \leq \frac{-e^x+1}{2x}$

- En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$

- Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$\text{et pour tout réel } x > 0, F'(x) = \frac{-1}{2} \left(\frac{e^x-1}{x} \right)^2$$

- Soit x un réel strictement positif.

- Montrer qu'il existe un réel c de $]0, x[$ tel que $F(x) - F(0) = xF'(c)$
- En déduire que F est dérivable à droite en 0.
- Dresser le tableau de variation de F et tracer sa courbe représentative.

Exercice 20:

I/ On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}$$

et on désigne par ζ_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Dresser le tableau de variation de f .
- Tracer ζ_f .

- Calculer l'aire de la région du plan limitée par la courbe ζ_f , l'axe des abscisses et les droites

$$\text{d'équations } x = \frac{1}{e}; x = 1.$$

II/ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!} \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{(\ln x)^n}{x\sqrt{x}} dx$$

- Calculer I_1 .

$$\text{b) Mque } \forall n > 0; |I_n| \leq \frac{1}{n!2^n}$$

- Calculer la limite de I_n .

- En intégrant par partie, montrer que pour tout n

$$\text{de } \mathbb{N}^* \text{ on a } I_{n+1} = I_n + \frac{(-1)^{n+1} \sqrt{e}}{(n+1)!2^{n+1}}$$

- Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* ,

$$I_n = -1 + \sqrt{e} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!2^k}$$

- En déduire la limite de la somme :

$$S_n = 1 - \frac{1}{1!2} + \frac{1}{1!2^2} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!2^n}$$

Exercice 21 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$$

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$

- En déduire que la courbe C admet deux asymptotes que l'on précisera.

- Etudier la position de C par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

- Dresser le tableau de variation de f .

- Montrer que C admet une unique tangente D parallèle à Δ . Préciser les coordonnées du point de contact B .

- Donner une équation de D .

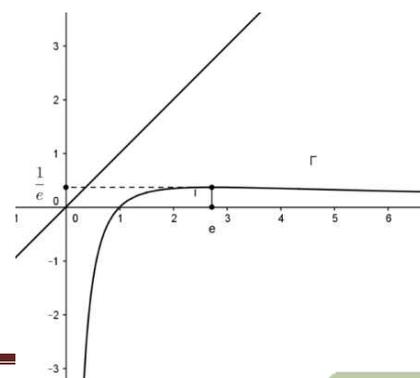
- Dans la figure ci dessous, On a tracé la droite

$$\Delta : y = x \text{ et la courbe } \Gamma : y = \frac{\ln x}{x}$$

- Construire le point $A(\frac{1}{e}, 0)$ et vérifier que A appartient à D .
- Tracer la droite D et placer le point B .

- Tracer C .

- Calculer l'aire de la partie du



plan limitée par C, la droite Δ et les droites d'équations : $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$

Exercice : 22

Soit f la fonction définie sur $]-\ln 2, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{2e^x - 1}} \text{ et } g \text{ la fonction définie sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

par $g(x) = -\ln(1 + \sin x)$.

1) a) Dresser le tableau de variations de g

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $]-\ln 2, +\infty[$

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-\ln 2, +\infty[$ et que $(g^{-1})'(x) = f(x)$

2). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, on pose

$$F_n(x) = \int_0^x (f(t))^{2n} dt$$

a) Donner le sens de variations de F_n

b) Calculer $F_1(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_1(x) = \ln 2$

c) Mque pour tout réel $t \geq 0$; $-e^{-\frac{t}{2}} \leq f(t) \leq 0$

d) En déduire que $F_n(x) \leq \frac{1}{n}$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x)$ est finie.

3. On pose $U_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x)$.

On se propose dans la suite de déterminer U_n .

a) Mque $F_{n+1}(x) + F_n(x) = -\frac{1}{n} [(f(x))^{2n} - 1]$

b) En déduire que $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n}$

5. On pose $W_n = (-1)^n U_n$; $n \in \mathbb{N}^*$.

Vérifier que : $W_{n+1} - W_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

En déduire que pour $n \geq 2$;

$$u_n = (-1)^n \left[-\ln 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right].$$

Exercice 23: (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = t e^{-t}$

1) a) Dresser le tableau de variations de f.

En déduire que f est bornée.

b) Montrer alors que pour tout réel $t \geq 0$,

$$\text{on a: } f(t)e^{\frac{t}{2}} \leq 1.$$

2) Pour tout entier $n \geq 1$, on note F_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$F_n(x) = \int_0^x [f(t)]^n dt.$$

a) Prouver que $[f(t)]^n \leq e^{-\frac{t}{2}}$. On pourra utiliser la question 1).

b) En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $F_n(x) \leq 2$.

c) Prouver alors que $F_n(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

3) Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction G_n

$$\text{sur } [0, +\infty[\text{ par } G_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt.$$

a) Expliciter $G_1(x)$.

b) Montrer que $G_{n+1}(x) = (n+1) G_n(x) - x^{n+1} e^{-x}$.

c) En déduire, en raisonnant par récurrence,

$$\text{que } \lim_{x \rightarrow +\infty} G_n(x) = n!$$

4) a) Montrer que $(G_n)'(nx) = n^n [f(x)]^n$.

b) Prouver alors que $F_n(x) = \frac{1}{n^{n+1}} G_n(nx)$.

$$\text{En déduire } \lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x).$$

Exercice 24 (2,5points)

Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^4}}$$

1) Soit F la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par :

$$F(x) = H(\sqrt{\sin(2x)})$$

où H la primitive de f qui s'annule en 0.

a) M que F est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{4}[$ et déterminer $F'(x)$

b) En déduire que pour tout x de $[0, \frac{\pi}{4}]$

$$\text{on a : } F(x) = x - \frac{1}{2} \tan(x).$$

c) Déterminer alors $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(t) dt$

2) Pour tout $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ on pose :

$$G(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt. \text{ Etudier la parité de } G$$

Exercice :25 (3.5points)

On se propose de résoudre dans \mathbb{N} l'équation

$$(E): x^{53} \equiv 3 \pmod{37}$$

1) Soit x solutions de (E)

a) Montrer que x et 37 sont premiers entre eux.

b) Montrer que :

$$x^{36} \equiv 1 \pmod{37} \text{ et } x \equiv 3^{17} \pmod{37}$$

2) a) Soit $x \in \mathbb{N}$

M que si $x \equiv 3^{17} \pmod{37}$ alors x est solution de (E)

b) En déduire que l'ensemble des solutions de

(E) dans \mathbb{N} est $\{37k + 25; k \in \mathbb{N}\}$

3) Soit x une solution de (E).

$$\text{On pose } S = 1 + x + x^2 + \dots + x^{52}$$

a) Vérifier que $(x-1)S = x^{53} - 1$

En déduire que $12S \equiv 1 \pmod{37}$

b) Déterminer alors le reste modulo 37 de S

Exercice : 26 (4points)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par

$$f(x) = \ln \left(\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2} \right).$$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, i, j) du plan.

1a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^*_+ et que
 $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}$.

c) Dresser le tableau de variation de f construire C_f .

2)a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie \mathbb{R}_+ .

b) Soit $x \in \mathbb{R}^*_+$. Résoudre dans \mathbb{R}_+ l'équation en $y : e^y + e^{-y} - 2 = x$.

Expliciter alors $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

3) Soit h une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I .

a) Montrer que h^{-1} admet des primitives sur $h(I)$.

b) Soit α et β deux réels de I .

Montrer que $\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} h^{-1}(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} th'(t) dt$.

4)a) Calculer $f(0)$ et $f\left(\frac{(e-1)^2}{e}\right)$.

b) On désigne par A l'aire (u.a) de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droite d'équations

$x = 0$, $x = \frac{(e-1)^2}{e}$ et $y = 0$. Montrer que $A = \frac{2}{e}$ (u.a)

Exercice :27

On considère la suite U définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \end{cases} ; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq n$. En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n.$$

2/ Soit W la suite définie sur \mathbb{N}^* par

$$W_n = U_n^2 - U_{n+1} \cdot U_{n-1}$$

a/ Montrer que W est une suite géométrique de raison (-1)

b/ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n^2 - U_{n+1} \cdot U_{n-1} = (-1)^n$$

3/ On considère la suite V de terme général $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

a/ Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_{n+1} - V_n) = 0$

b/ Etablir l'égalité : $V_{n+1} - V_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{U_{n+1} \cdot U_{n-1}}$, et en déduire la monotonie de la suite (V_{2n}) et celle de la suite (V_{2n+1}) .

c/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{2n} \leq V_{2n+1}$

d/ En déduire que les suites (V_{2n}) et (V_{2n+1}) sont convergentes et qu'elles convergent vers la même limite.

e/ En déduire que la suite (V_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice :28(6points)

1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par
 $g(x) = 1 - x + x \ln x$.

a) Etudier les variations de g .

b) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$,
 $1 + x \ln x \geq x$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1+x \ln x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, i, j) .

a) Montrer que f est continue à droite en 0.

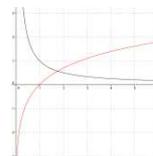
b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.

3)a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ $f'(x) = \frac{1 + \ln x}{(1 + x \ln x)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

4) Dans la **figure ci dessous**, on a tracé dans un repère orthonormé (O, i, j) , les courbes C_1 et C_2 des fonctions définies sur $]0, +\infty[$ respectivement par $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$.



a) Construire le point A de C_1 d'abscisse $\frac{1}{e}$ et le point B de C_2 d'abscisse $1 - \frac{1}{e}$.

En déduire une construction du point C de C_f d'abscisse $\frac{1}{e}$.

b) Déduire de la question 1-b) que pour tout $x > 0$, $f(x) \leq \frac{1}{x}$.

Déterminer alors la position relative de C_f et C_2 .

c) Tracer la courbe C_f .

5) On considère la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.

a) que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\frac{1}{t + \ln t} \leq f(t)$.

b) Montrer alors que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln(1 + \ln x) \leq F(x) \leq \ln x$.

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

6) Soit n un entier naturel non nul ;

a) Montrer que la fonction $h: x \mapsto x - F(x)$ est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

b) En déduire que l'équation $h(x) = n$ admet dans $[1, +\infty[$ une seule solution α_n .

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$.

d) Vérifier que $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{1 - \frac{F(\alpha_n)}{n}}$.

Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$.

Exercice:29

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O, u, v) Soient les points A et B du plan d'affixes respectives z_1 et z_2 tels que O, A et B ne sont pas alignés. On considère le point M d'affixe z

vérifiant la relation : $z = \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$

1) Montrer que : $\frac{z_2 - z}{z_1 - z} = -\frac{z_2}{z_1}$

2) Montrer que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \pi + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) [2\pi]$

3) En déduire que M appartient au cercle C circonscrit au triangle OAB.

II) On suppose de plus que z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation :

$$(E_\theta): z^2 - 2(e^{i\theta} + 1)z + 2e^{i\theta} - 2 = 0, \theta \in]0, \pi[.$$

1) a) Montrer que $z = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$.

b) Donner la forme algébrique de z .

c) Déterminer alors l'ensemble des points M lorsque θ décrit $]0, \pi[$.

Pour la suite on prendra $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

On pose $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{12}Z_1}$ et $Z_2 = e^{i\frac{\pi}{12}Z_2}$. z_1 et z_2 sont les solutions $(E_{\frac{2\pi}{3}})$

On désigne par A' , B' et C' les points d'affixes respectives Z_1 , Z_2 et $Z_M = e^{i\frac{\pi}{12}Z_M}$.

3) a) Soit K et K' les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[A'B']$.

Vérifier que $z_K = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_{K'} = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

b) En remarquant que

$$(Z_2 - Z_1)^2 = (Z_2 + Z_1)^2 - 4Z_1Z_2,$$

vérifier que $(Z_2 - Z_1)^2 = 4((Z_{K'})^2 (i\sqrt{2\sqrt{3}})^2)$.

c) Montrer que $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{K'E}) + (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{K'F}) \equiv 0 [\pi]$ où E et F sont les points d'affixes $Z_F = -Z_E$.

En déduire que la droite (A'B') porte la bissectrice intérieure de l'angle EK'F.