La musique est une mathématique sonore,
la mathématique une musique silencieuse. *Edouard Herriot*

Exercice 1 :

Répondre par vrai ou faux

1) Le nombre $21^{2012} + 10^{2013}$ est divisible par 11.
2) Soit a et b deux entiers tels que 4a +3b = 5 alors pgcd(a, b) = 5.
3) Si un entier n est divisible par 4 et par 6 alors il est divisible par 12.
4) Le quotient, dans la division euclidienne de - 52 par – 7 est 8
5) L'ensemble des points M(z) tels que $\left|\frac{1}{2}z - \bar{z}\right| = 1$ est une ellipse d'excentricité $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

6) La fonction f définie sur IR par f(x) = $e^{\frac{1}{2}x}$ - 2 est une solution de l'équation différentielle :
$y = \frac{1}{2}y' + 1$.

7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x-x^2}2^x - \frac{1}{x}\right] = +\infty$.

8) La valeur moyenne de la fonction f : x↦ $\frac{1}{1+e^x}$ sur [0, ln3] est $\frac{1}{\ln(81)}$.

Exercice 2 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. **En justifiant votre réponse.**

1) L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}$). L'ensemble des points M(x; y; z) tels que : $\begin{cases} 2x - 6y + 2z - 7 = 0 \\ -x + 3y - z + 5 = 0 \end{cases}$ est

a) une droite b) un plan c) le vide

2) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2\ln(e^x + 1)$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$,

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

3) Soit m ∈ IR, on considère l'équation d'inconnue réelle x, (E) $e^{2x} - 2me^x + 1 = 0$
a) (E) n'admet jamais une seule solution
b) (E) admet deux solutions positives pour m > 1
c) (E) n'admet pas de solutions pour m< -1.

Exercice 3:

1. Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers 14n + 3 et 5n + 1 sont premiers entre eux.
2. On considère l'´equation (E) : 87x + 31y = 2
(a) Vérifier, en utilisant par exemple la question 1. que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple (u ; v) d'entiers relatifs tel que 87u + 31v = 1 puis une solution (x_0 ; y_0) de (E).
(b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans Z^2.
(c) Application : Déterminer les points de la droite d'´equation 87x−31y−2 = 0 dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.

Exercice 4:

Dans le plan orienté, on considère un triangle IAB rectangle et isocèle tel que ($\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$)≡ $\frac{\pi}{2}$ [2π]

On désigne par J, K et L les milieux respectifs des segments [AI], [IB] et [AB]

1)a)Montrer qu'il existe un déplacement unique f tel que f(A) = I et f(I)=B.
b)Caractériser f.

2)Soit g l'antidéplacement tel que g(A) = I et g(I)=B
a)Montrer que g est une symétrie glissante.
b)Déterminer la forme réduite de g.
c)Construire le point L'=g(L).
Montrer que LIL'B est un carré.

3)On pose h = t_{IA} o g
a)Déterminer h (L)
b)Caractériser alors h

4)On pose $\varphi = t_{AB}$ o S_{AB}. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ.

Exercice 5:

Soit E : $z^2 - 2e^{i\alpha}\cos 2\alpha\, z + e^{2i\alpha} = 0$; $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

1)Résoudre E lorsque $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

2)a)Vérifier que $z_1 = e^{-i\alpha}$ est une solution de E.
b)Déterminer alors la deuxième solution z_2 de E.

3)Dans le plan complexe (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) on désigne par A le point d'affixe z_1
et par B le point d'affixe z_2
a)Déterminer l'affixe du point C tel que OABC soit un parallélogramme.
b)Déterminer les valeurs de α pour que OABC soit un losange.

Exercice :6

Pour tout n ≥ 1, $I_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{1-t}\,dt$, x ∈ IR

1)Calculer $I_1(x)$
2)a)En intégrant $I_n(x)$ par parties, calculer $I_{n+1}(x) - I_n(x)$, (n ≥1)
b)Déduire que $I_n(x) = e - \left(1 + \sum_{k=1}^{k=n}\frac{x^k}{k!}\right)e^{1-x}$.

3)On suppose maintenant que x est un élément fixé de]0, 1]
a)Démontrer que, pour tout n > 0,
$0 \le I_n(x) \le \frac{1}{n!} e\,(1-e^{-x})$
b)Déduire alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x)$
c)Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!}\right) = e^x$.

Exercice 7 :
Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct (O, u, v). Soit $\alpha \in [0,\frac{\pi}{2}]$
1) Résoudre dans C l'équation : $z^2-2z+2=0$
2) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A= 2i$, $z_B =(1+ i)e^{i\alpha}$ et $z_C = (1- i)e^{i\alpha}$.
a) Écrire z_B et z_C sous forme exponentielle.
b) En déduire que le triangle OBC est rectangle isocèle en O.
c) Pour quelle valeur de α le quadrilatère OABC est-il un parallélogramme ?
3) À tout point M(z) on associe le point M'(z') tel que $z'=2+(z-2)^2$
On note C le cercle de centre K(2) et de rayon $\sqrt{2}$.
a) Déterminer z' pour $z = z_A$.
b) Soit M le point de C d'affixe $z =2+\sqrt{2}\, e^{i\alpha}$
Montrer que l'affixe de M' est $2+\sqrt{2}\, e^{i2\alpha}$
Déterminer et construire , l'ensemble des points M' lorsque α varie dans $[0,\frac{\pi}{2}]$
4) Soit N le point d'affixe $z_N =2+\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}$
et N' le point associé à N.
a) Écrire $z_N - 2$ sous forme exponentielle; en déduire que N est un point de C .
b) Montrer que : $(\vec{u}, \overrightarrow{KN'}) \equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$
c) Placer N sur la figure puis construire le point N'.

Exercice :8

Soit ABCD un carré de centre O tel que

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

On désigne I = A * B et J = A * D

On note s la similitude directe tels que

s(D) = O et s(C) = I.

1) a) Déterminer le rapport et l'angle de s.

b) Soit Ω le centre de s.

Trouver une construction géométrique de Ω .

2) a) Préciser les images respectives des droite (BD) et (BC) par s .

b) Déterminer alors s (B) et s (A) et s o s (B) .

c) Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés (B , 1) et (J , 4).

3) On suppose dans cette question que $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ un repère orthonormé direct

a) Déterminer l'application complexe associée à s.

b) En déduire l'affixe z_0 de Ω centre de s.

4) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et h =R o s.

a) Préciser h (B) puis caractériser h.

b) Soit Ω' le milieu de $[\Omega B]$.

Montrer que OΩ Ω' est rectangle et isocèle.

Exercice 9 :(4 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

(E) : $z^2 - z(3m - i)m + 2m^2(1+m^2) = 0$, où <u>m est un paramètre réel</u>.

<u>I/</u> Résoudre l'équation (E).
<u>II/</u> Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct ($O,\vec{i},\vec{j}$).

On considère les points M(m(m + i)) et N(2m(m – i)).

1) a/ Montrer que M varie sur une parabole P quand m varie sur IR.

b/ Caractériser la parabole P.
c/ Montrer que par le point I(-1, 0) passe deux tangentes T_1 et T_2 à la parabole P.
d/ Tracer la parabole P ainsi que les tangentes T_1 et T_2.
2) a/ Déterminer l'affixe du point G image du point N par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
b/ Déduire que le point G est l'image du point M par une similitude indirecte g que l'on caractérisera.

Exercice :10

1) Démontrer la propriété suivante :

Une similitude ayant deux points fixes distincts est l'identité du plan ou une symétrie orthogonale.

2) Dans le plan complexe on considère la similitude s d'écriture complexe :

$z' = -i\bar{z} + 1 + i$. Soit A d'affixe 1 et B d'affixe i.

a)Démontrer que A et B sont invariants par s.

b) Quel est l'image du point O par s.

c)Caractériser alors s.

3)Soit h l'homothétie de centre $\Omega(\frac{1}{2}(1+i))$ et de rapport $\sqrt{2}$. Caractériser $\sigma = h \circ s$

Exercice 11:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = (1-x)e^{2x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Dresser le tableau de variation de f.

2°)a) Montrer que $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion I qu'on précisera.

b)Donner une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point I.

c)Tracer T et $\mathscr{C}$.

3)Calculer l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x= 1.

4°)On pose $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x} dx$, $\forall n \in IN^*$

a)Mque $\forall n \in IN^*$, on a : $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e^2}{n+1}$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

b)M que $\forall n \in IN^*$, on a : $2I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

5°) Pour tout $n \in IN^*$, $U_n = \frac{2^n}{n!} I_n$

a)M par récurrence que $\forall n \in IN^*$, on a : $\frac{2^{n-1}}{n!} \le 1$.

b)En déduire que $\forall n \in IN^*$, on a : $U_n \le \frac{2e^2}{n+1}$.

a) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

6°)a)Mque $\forall n \in IN^*$, on a : $U_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + U_n$.

b)En déduire que $\forall n \in IN^*$, on a :

$$U_n = \frac{1}{2}\left[e^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\right].$$

c)En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}$

Exercice :12

A)Soit la fonction f définie sur]-1, 1[par :

$f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dt$

1)a)Justifier l'existence de f.

b)Prouver qu'il existe trois réels α, β et φ tel que $\forall t \in IR - [-1, 1]$, $\frac{t^2}{1-t^2} = \alpha + \frac{\beta}{1-t} + \frac{\varphi}{1+t}$

c)Déduire que $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = -x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

2)Etudier les variations de f et construire sa courbe C dans un repère orthonormé.

3)a)Montrer que $\forall x \in IR^*_+$ et $\forall k \in IN^*$ on a :

$\ln(x) \le -1 + \frac{x}{k} + \ln k$

b)Déduire que $\forall k \in IN^*$, $\int_{-\frac{1}{2}+k}^{\frac{1}{2}+k} \ln(x)\, dx \le \ln(k)$

et que $\forall n \in IN^*$ $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x)\, dx \le \ln(n!)$

c)En déduire que $\forall n \in IN^*$,

$\ln(n!) \ge (n + \frac{1}{2})\ln(n+\frac{1}{2}) - n + \frac{1}{2}\ln 2$

4)Soit la suite u définie par sur IN* par :

$u_n = n + \ln(n!) - (n + \frac{1}{2})\ln(n)$

a)Montrer que $\forall n \in IN^*$, $u_n \ge \frac{1}{2}\ln 2$,

b)Vérifier que $\forall n \ge 1$, on a:

$u_n - u_{n+1} = (2n+1) f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$

c)Déduire que la suite u est convergente.

B)Soit (v_n) la suite définie par :

$V_0 = \int_0^1 \sqrt{(1-x)}\, dx$ et $\forall n \in IN^*$, $V_n = \int_0^1 x^{n/2}\sqrt{1-x}\, dx$

1)Calculer v_0

2)a)Définir l'ensemble des points M(x,y) tel que $y^2 - x(1-x) = 0$

b)Déduire que $v_1 = \frac{\pi}{8}$

3)a)Prouver que la suite (v_n) est décroissante .

b)Déduire que la suite v est convergente.

4)a)Prouver par une intégration par partie que

$\forall n\in IN$, $v_{n+2}=\frac{n+2}{n+5}v_n$

b)Déduire que $\forall n\in IN$, $\frac{n+2}{n+5}\leq\frac{v_{n+1}}{v_n}\leq 1$

et $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=1$

5)a)Prouver par récurrence que

$\forall n\in IN$, $v_n v_{n+1}=\frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

b)By making appear the quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ into the preceding expression prove that: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/2}v_n=\sqrt{2\pi}$

6)Montrer que : $\forall p\in IN$, $v_{2p}=\frac{2}{(2p+1)(2p+3)}\cdot\frac{(2^p.p\,!)^2}{(2p)\,!}$

C)1)Montrer que $\forall n\in IN^*$, $e^{u_n}=\frac{n!}{n^{\frac{n+1}{2}}}e^n$

2)Exprimer $e^{2u_p-u_{2p}}$ en fonction de p et v_{2p}, ($p\in IN^*$)

3)Soit l la limite de u

Déduire de ce qui précède que $l=\ln(\sqrt{2\pi})$

Exercice :13

I/Soit x un réel de]-1, + ∞[, on pose $\varepsilon_2(x)=\int_0^x\frac{t^2}{1+t}dt$

1)a) $x\in IR+$, mque, $0\leq\varepsilon_2(x)\leq\frac{x^3}{3}$

b) $x\in]-1,0]$, mque $\frac{x^3}{3(1+x)}\leq\varepsilon_2(x)\leq 0$

c) En déduire que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon_2(x)}{x^2}=0$

2)a) Démontrer que pour tout x de]-1, +∞[

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\varepsilon_2(x)$

b)Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

II/ Soit $x\in]-1,0]$ et $n\in IN^*$, on pose $\varepsilon_n=\int_0^x\frac{t^n}{1+t}dt$

1)Etudier le signe de $\varepsilon_n(x)$ suivant n est pair ou impair.

b)Etudier le signe de $\varepsilon_n(x)-\frac{x^{n+1}}{(n+1)(x+1)}$,

en déduire que $|\varepsilon_n(x)|\leq\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(x+1)}$

2)a) Mque $\forall t\neq -1$

$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\ldots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+\frac{(-1)^n t^n}{1+t}$

b)En déduire que $\forall x$ de]-1, 0] et pour tout n de IN*

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\varepsilon_n(x)$

3) On considère la suite u définie par:

$u_n=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.2^2}+\ldots+\frac{1}{n.2^{n-1}}\right]$

Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$

Exercice :14

ABC est un triangle rectangle en A tel que AC=2AB et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $D=S_A(B)$.

On désigne par F le projeté orthogonal de A sur BC], I le symétrique de F par rapport à (AB) et J le symétrique de F par rapport à (AC).

1)a)Montrer que les droites (IB) et IA) sont perpendiculaires
ainsi que les droites (CJ) et (AJ).

b)Caractériser $S_{(AC)}\circ S_{(AB)}$.
et en déduire que A est le milieu de [IJ]

2)Soit S la similitude directe qui transforme B en A et A en C.

a)Déterminer le rapport et l'angle de S.

b)Montrer que F est le centre de S.

c)Montrer que S(I)=J. En déduire CJ=IJ.

3)Soit $\psi=S\circ S_{(AC)}$

a)Préciser la nature et le rapport de ψ.

b)Déterminer ψ(A) et ψ(D).

c)Soit W le centre de ψ et Δ son axe et G le point défini par $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

M que $\overrightarrow{WC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{DC}$ et que Δ est la médiatrice de [AG].

4)Soit $f=S_{(AG)}\circ\psi$

a)Déterminer f (D)

b)Mque f est une homothétie que l'on précisera.

Exercice 15 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a)Montrer que f est définie sur [1, + ∞[.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement.

2) a.Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

b)Dresser le tableau de variation de f.

3) a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b. Tracer la courbe (C).

4) a. Montrer que f est bijective et tracer, dans le même repère, la courbe (C ') de sa fonction réciproque f^{-1}.

b)Montrer que pour tout $x\in IR_+$, $f^{-1}(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

5) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.Soit S le solide obtenu par la rotation de la partie de (C ') relative à [0, 1] autour de l'axe $(O,\vec{i})$. Calculer le volume de S.

6) En intégrant par parties, calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives: x = 1 et x = 2.

Exercice :16

A tout $n\in IN^*$, on note f_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f_n(x)=\dfrac{e^x}{(x+1)^n}$,
on désigne par C_n sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

A)1) a)Dresser le tableau de variation de f_n

b)Mque pour tout x > -1, $f'_n(x) = f_n(x) - n\,f_{n+1}(x)$

2)Etudier les positions relatives des courbes C_1 et C_2 puis construire C_1 et C_2.

3) a)Montrer que l'équation $f_2(x)= x$ admet dans $[\frac{1}{2}, 1]$ une solution unique α

B)Pour tout n de IN*, on pose $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$

1)a)Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

b)Déduire que la suite (In) est convergente.

2)Mque $\forall\, n\in IN^*-\{1\}$;

$\dfrac{1}{n-1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \le I_n \le \dfrac{e}{n-1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

en déduire la limite de (I_n)

3) a)Montrer que $\forall\, n\in IN^*$: $n\,I_{n+1} = 1+I_n-\dfrac{e}{2^n}$

b)Calculer la limite de $n\,I_{n+1}$ et celle de nI_n.

C)Soit $F(x)=\int_0^{2\ln x} f_1(t)dt$ $x\ge1$

1) a)Justifier l'existence de F(x) pour $x\ge 1$.

b)Montrer que F est dérivable sur $[1,+\infty[$ et calculer F'(x)

c)En déduire que $\forall\ x\ge1$, $F(x)=\int_1^x \dfrac{2t}{1+2\ln t}dt$

2)M que $\forall\, t\in IR$, $e^t\ge 1+t$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

3) a)Montrer que $\forall\, x\ge 2$, $F(x)\ge \int_{\frac{x}{2}}^x \dfrac{2t}{1+2\ln t}dt$

b)Montrer que $\forall\, x\ge 2$,il existe un réel $c\in[\frac{x}{2}, x]$ tel que $F(x)\ge\dfrac{cx}{1+2\ln c}$

c)En déduire que $\forall\, x\ge 2$, $\dfrac{F(x)}{x}\ge\dfrac{x}{2(1+2\ln x)}$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$

4) a)Dresser le tableau de variation de F.

a)Montrer que la courbe Γ de F admet un point d'inflexion d'abscisse $\sqrt{e}$

b)Tracer l'allure de Γ. On donne $\varphi(\sqrt{e})\approx 1,2$.

Exercice :17

A)On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=(x-1)e^{(2-x)}$ et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, i, j)

1) Etudier les variations de f puis construire sa courbe $\mathscr{C}$.

2)a)Soit $\alpha>1$. Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$ et les droites d'équations : $y=0$, $x=1$ et $x=\alpha$

b) Calculer la limite de $A(\alpha)$ qd α tend vers $+\infty$.

B) Soit $n\in IN^*$, $n\ge2$ et g_n la fonction définie sur IR par : $g_n(x)=(x-1)^n e^{(2-x)}$

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe de g_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1)a) Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n=0$

b)Dresser le tableau de variation de g_n (on distinguera les cas n pair et n impair)

c)En déduire que $\forall x\ge1$ on a : $0\le g_n(x)\le e^{1-n}n^n$.

2) On pose $J_n = \dfrac{1}{n!}\int_1^2 (x-1)^n e^{2-x}dx$

a)Interpréter géométriquement J_1.

b)Montrer que $J_{n+1}=J_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$

c)En déduire que $\forall n\in IN^*$ on a :

$J_n = e - \left(\dfrac{1}{0!}+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right)$

d)M que $\forall n\in IN^*$ on a : $0 \le J_n \le \dfrac{e}{n!}$.

En déduire $\lim\limits_{n\to\infty}(J_n)$

e)Calculer alors $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{0!}+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right)$

C) soit $F(x)=\int_x^{x+1}\dfrac{e^{2-t}}{t-1}dt$; $x \in]1, +\infty[$ par

1)a)Montrer F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que

$F'(x)=\dfrac{e^{1-x}[(e-1)x+1]}{x(1-x)}$

b)En déduire le sens de variation de F sur $]1, +\infty[$.

2)a)A l'aide de la fonction f de la partie A montrer

que $0 < \dfrac{e^{2-t}}{t-1} \le \dfrac{1}{(t-1)^2}$, $\forall t >1$

b)En déduire que $\forall$ x > 1 on a :

$0 \le F(x) \le \dfrac{1}{x(x-1)}$. Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

3)a)Montrer que $\forall x\in]1, 2]$ et $\forall$ t $\in$ [x, x+1]

on a : $\dfrac{e^{2-t}}{t-1} \ge \dfrac{e^{1-x}}{t-1}$

b)En déduire que $F(x) \ge e^{1-x}[\ln(x)-\ln(x-1)]$

puis calculer $\lim\limits_{x\to1+} F(x)$

c) Dresser alors le tableau de variation de F.

Exercice 18:

I) On considère l'équation (E) : 7x + 18y = 1 d'inconnues x et y entiers relatifs.

1°) Justifier pourquoi (E) possède-elle au moins une solution dans ZxZ? (Sans en proposer une solution particulière).

2°) Déterminer une solution particulière (x_0 , y_0) de (E).

3°) Résoudre (E) dans ZxZ.

II) Pour tout entier naturel non nul n, on appelle U_n l'entier naturel qui s'écrit avec n chiffres 1

Exemple : U_1 =1 ; U_2 = 11 ; U_4= 1111.

1°) Pour chacune des affirmations ci - dessous dire si elle est vraie ou fausse en justifiant :

a)Pour tout entier $n \ge 2$, U_n est premier.

b)Pour tout entier $n \ge 2$, $U_n \equiv 1$ [mod5]

c)U_6 est multiple de U_3.

2°) a) Pour $n \in IN^*$, Calculer $(U_{n+1} - 10.U_n)$ et en déduire que U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.

b) Vérifier que pour tout $n \in IN^*$, $9.U_n = 10^n - 1$

c) Démontrer que si n est un multiple de d alors $10^n - 1$ est un multiple de $10^d - 1$.

En déduire que si d divise n alors U_d divise U_n.

d) Démontrer que si U_n est premier alors n est premier. Que pensez-vous de la réciproque ?

3°) Recherche du PGCD(U_7 , U_{18})

a) Déduire de I) un couple d'entiers naturels (p , q) tel que : 7p - 18q = 1

b) Démontrer que $(10^{7p} - 1) - 10(10^{18q} - 1) = 9$ et en déduire que : $U_{7p} - 10.U_{18q} = 1$.

c) Déduire de 2°) c) le PGCD(U_7 , U_{18})

Exercice :19

On considère la suite définie sur IN*

par : $U_n = \int_1^e \dfrac{(\ln x)^n}{x^2}dx$.

1) a) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $U_n \ge 0$.

b) Montrer que U est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2) a) En intégrant par parties, calculer U_1.

b) Montrer que pour tout $n\in IN^*$,

$U_{n+1} - (n+1)U_n = -\dfrac{1}{e}$

c) En déduire la valeur de U_2.

3) a) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $0 \le U_n \le \dfrac{1}{ne}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice :21

I°) 1°) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$g(x) = \sqrt{e^{2x}-1}$

a)Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{g(x)}{x} = +\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat.

b)Dresser le tableau de variation de g.

2°) Soit G la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$G(x)=g(x)-\int_0^{g(x)}\frac{dt}{1+t^2}$$

a)Montrer que G est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $G'(x)=g(x)$

b)Montrer alors que pour tout réel x > 0,

$$\int_0^x g(t)dt=g(x)-\int_0^{g(x)}\frac{dt}{1+t^2}$$

c)On admet que $\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$.

Déduire que $\int_0^{\ln\sqrt{2}} g(t)dt=1-\frac{\pi}{4}$

II°) Pour tout n ∈ IN*, on pose :

$$I_n=\int_0^{\ln\sqrt{2}}(g(x))^n\,dx \text{ et } I_0=\ln\sqrt{2}$$

1°)a) Vérifier que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel positif x, on a:

$$(g(x))^n+(g(x))^{n+2}=\frac{1}{2}U'(x).(U(x))^{\frac{n}{2}} \text{ où } U(x)=e^{2x}-1$$

b) Montrer alors que pour tout n ∈ IN, on a :

$$I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+2}.$$

c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in IN}$ est décroissante et déterminer sa limite.

2°) Pour tout n ∈ IN*, on pose : $U_n=I_{n+4}-I_n$.

a) Montrer que $\sum_{k=0}^{n}U_{4k+1}=I_{4n+5}-I_1$

b) Vérifier que pour tout n ∈ IN,

$U_n=(I_{n+4}+I_{n+2})-(I_{n+2}+I_n)$.

En déduire que $U_n=\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+2}$.

c) Exprimer alors U_{4n+1} en fonction de n.

Calculer la limite lorsque n tend vers +∞ de la somme $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+....+\frac{-1}{4n+3}+\frac{1}{4n+5}$

Exercice 22:

1°) Dans Z², on considère l'équation
(E) : 195x – 232y = 1.

a)Déterminer le PGCD des deux nombres 195 et 232.

b)Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : S = {(163 + 232k, 137 + 195k), k∈Z}.

c)Déterminer l'unique entier naturel d vérifiant $0 \le d \le 232$ et $195d \equiv 1$ [mod232].

2°) Montrer que 233 est un nombre premier.

3°) Soit a et b deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 232.

a)Déterminer le reste de la division euclidienne de a^{232} par 233.

b)Montrer que $a^{195} \equiv b$ [mod233] si et seulement si $a \equiv b^{163}$ [mod233].

Exercice :23

Le plan est orienté dans le sens direct.
Soit ABCD un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

On note $J=A*D$, $K=C*D$ et $F=S_D(C)$.

La perpendiculaire en D à la droite (BD) coupe droite (OJ) en un point E.

1) Soit S la similitude directe telle que S(A) = J et S(B) = D.

a- Déterminer le rapport et l'angle de S.

b- Déterminer les images des droites (BD) et (AD) par la similitude S. En déduire S(D).

2) On désigne par ζ et ζ' les cercles de diamètres respectifs [AJ] et [BD].

a- Soit Ω le centre de S. Montrer que $\Omega\in\zeta\cap\zeta'$ puis construire le point Ω.

b- Montrer que les points Ω , B et E sont alignés.

3) Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(O)$ = A et $\sigma(K)$ = B.

a- Déterminer le rapport de σ.
Montrer que C est le centre de σ.

c- Déduire l'axe de σ.

4- Soit $\varphi=So\sigma$.

a- Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(K)$.

a- Caractériser alors φ.

Exercice :24

1) Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$h(x)=a\ln^2(x)+b\ln(x)$; a et b deux réels.

Déterminer les réels a et b sachant que h admet un minimum en $e^{\frac{1}{2}}$ égale à $(-\frac{1}{4})$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$f(x)=\ln^2(x)-\ln(x)$.

On désigne par c la courbe représentative de dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a- Montrer que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

b- Montrer que tout $x \in]0,+\infty[$; $f'(x) = \frac{2\ln(x)-1}{x}$.
c- Dresser le tableau de variation de f.
d- Préciser les points d'intersection de $\mathcal{c}$ avec l'axe des abscisses.
e- Tracer la courbe $\mathcal{c}$.
(On précisera les branches infinies).

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]0, e^{\frac{1}{2}}]$.
a- Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g.
b- Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans I une unique solution α et que $\alpha \in]0,1]$.
c- Tracer la courbe $\mathcal{c}'$ de g^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
d- Montrer que tout $x \in J$; $g^{-1}(x) = e^{\frac{1}{2} - \sqrt{x+\frac{1}{4}}}$.

4) Soit $A = \int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx$.
a- Interpréter graphiquement A
b- Calculer A.
c- En déduire la valeur de $K = \int_0^{\alpha} e^{-\sqrt{x+\frac{1}{4}}}\,dx$.

Exercice 25:(6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

I/ 1) a/ Etudier les variations de f.

b/ Montrer que la courbe C de f admet une asymptote oblique d'équation : $y = -x$

2) a/ Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

b/ Tracer la courbe C de f et la courbe C' de f^{-1} dans un même repère orthonormé.

3) a/ Montrer que pour tout réel t positif on a ;

$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$.

b/ En déduire que pour tout réel x on a :

$e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} \leq f(x) \leq e^{-x}$

II/ Soit u la suite définie sur IN* par :

$u_1 = 1 + \frac{1}{e}$ et pour tout n non nul, $u_{n+1} = (1+\frac{1}{e^{n+1}})\,u_n$.

1) On pose v la suite définie par $v_n = \ln(u_n)$ pour tout n non nul.

a/ Montrer que pour tout n, non nul

$v_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

b/ Montrer que la suite v est croissante.

2) On définit les suites (S_n) et (T_n) par :

$S_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \ldots + \frac{1}{e^n}$ et $T_n = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \ldots + \frac{1}{e^{2n}}$.

a/ Déterminer les limites des suites S et T.

b/ Déduire de ce qui précède que pour tout entier n non nul on a : $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq v_n \leq S_n$.

3) a/ Montrer que la suite (v_n) est convergente.

On note a sa limite.

b/ Prouver que $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq a \leq \frac{1}{e-1}$.

c/ Montrer que la suite u est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice :26

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Soit O le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC, I le milieu du segment [BC], J le milieu du segment [AB] et L le milieu du segment [AC]

1°) Montrer que OBAC est un losange.

2°)a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que f(A) = C et f(B) = A.

a)Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

b)Montrer que $f = R_{(O,-\frac{\pi}{3})} \circ S_{(AB)}$.

b)Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de $R_{(O,\frac{\pi}{3})} \circ t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$

3°) Soit l'isométrie $\varphi = S_{(BC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.

a)Montrer que $S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = S_{(AO)} \circ S_{(AC)}$.

En déduire que $\varphi = S_{(IK)} \circ S_{(IJ)} \circ S_{(AC)}$ où K est le projeté orthogonal de I sur (AC).

b)Montrer alors que φ est une symétrie glissante dont précisera l'axe et le vecteur.

4°) Soit g une isométrie du plan qui laisse globalement invariant le triangle ABC.

a)Montrer que g fixe le point O.

b)Montrer que g([BC]) = [BC].
c)Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABC.

Exercice 27 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. Soit A(i) et B(i+1). On considère l'application

f:P\{A}$\rightarrow$P :M(z) $\rightarrow$M'(z') tel que z'-i = $\frac{2}{\overline{z+i}}$.

1)Montrer que les points A, M et M' sont alignés.
2)Déterminer l'ensemble ζ des points invariants par f_0
3)Dans cette question, on suppose que z=1+i+$e^{i\theta}$
a)Déterminer et construire l'ensemble Γ décrit par le point M d'affixe z lorsque θ décrit $]\frac{-\pi}{2},\frac{-\pi}{2}[$
b)Montrer que z'-i=1+i tan$\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
c)En déduire l'ensemble Γ' image de Γ par f.
Le construire.

Exercices 29 (5 points)

Soit f la fonction définie sur]0, e] par :
f(x) = ln²(x) -2ln(x) .
On désigne par C la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, i , j) . (unité graphique 2 cm)
1°)a) Mque tout x ∊]0,e] ; f'(x) = $\frac{2(-1+lnx)}{x}$
b) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe.
c) Préciser les points d'intersection de c avec l'axe des abscisses.
2°) Soit a un réel de l'intervalle]0 , 1]. On désigne par U(a) l'aire du domaine limité par C, l'axe des abscisses et les droites x = a et x = 1.
a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que U(a) = [4 - af(a) + 2aln(a) - 4a] .4 cm² .
b) Calculer limU(a)
3°)a) Montrer que f est une bijection de] 0, e] sur un intervalle J que l'on précisera.
On désigne par g la fonction réciproque de f.
b) Tracer la courbe C ' de g dans le même repère (O, i , j).
c) M que pour tout réel x ≥ –1 ; g(x)=$e^{1-\sqrt{x+1}}$.
4°) On désigne par α l'abscisse du point d'intersection des deux courbes C et C '.
Calculer l'intégrale K = $\int_0^{\alpha} e^{1-\sqrt{x+1}}dx$

Exercice 30 : (5 points)

Soit F la fonction définie sur [0, +∞[par :
F(x)=$\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt$ si x > 0 et F(0) = -ln2
1°)a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel x > 0,
F(x)= $\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.
b) Montrer que pour tout réel x > 0,
$e^x ln2 \leq \int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt \leq e^{2x}ln2$
c) Calculer $\lim_{x\to0+}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.
En déduire que F est continue à droite en 0.
2°)a) Montrer que pour tout réel x > 0,F(x)≤ $\frac{-e^x+1}{2x}$
b) En déduire $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$
3°) Montrer que F est dérivable sur]0, +∞[et pour tout réel x > 0, F'(x) = $\frac{-1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2$
4°) Soit x un réel strictement positif.
a) Montrer qu'il existe un réel c de]0 , x[tel que F(x) - F(0) = $xF'(c)$
b) En déduire que F est dérivable à droite en 0.
c) Dresser le tableau de variation de F et tracer sa courbe représentative.

Exercice 31 (4 points)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct . On désigne par f l'application u plan dans lui-même
qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'=($\frac{1+i}{2}$) z + 1 - i
1°)a) Montrer que f est une similitude directe centre I que l'on précisera
b) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application g_n = fofo...of (n fois)
2°) On définit la suite des points (A_n) par : A_0 le point d'affixe 2 + i et pour tout entier naturel n, .
On désigne par A_{n+1} = f (A_n).
a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, An = $g_n(A_0)$.
b) En déduire que pour tout entier naturel n,
a_n= $2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^n e^{\frac{i(n+2)\pi}{4}}$
c) Montrer que pour tout entier naturel n, les points I, An et A_{n+4} sont alignés.

Exercice 32:

I/ On considère la fonction f définie sur] 0 , +∞ [par f (x) = $\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}$
et on désigne par ζ_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
1) a) Dresser le tableau de variation de f .
b) Tracer ζ_f .

2) Calculer l'aire de la région du plan limité par la courbe ζ_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$; $x = 1$.

II/ On pose pour tout $n \in IN^*$,

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}\, n!}\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{(\ln x)^n}{x\sqrt{x}}\,dx$$

1) a) Calculer I_1.

b) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $|I_n| \leq \frac{1}{n!\,2^n}$.

c)Calculer la limite de I_n .

2) En intégrant par partie, montrer que pour tout n de IN^* on a $I_{n+1} = I_n + \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{e}}{(n+1)!2^{n+1}}$

3) a) Montrer que pour tout n de IN^*,

$I_n = -1 + \sqrt{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!2^k}$

b) En déduire la limite de la somme :

$S_n = 1 - \frac{1}{1!2} + \frac{1}{1!2^2} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!2^n}$

Exercice 33:(4 points)

Soit F la fonction définie sur IR* par

$F(x) = \int_x^{2x}\frac{1}{ln(1+t^2)}dt.$

1) Montrer que F est impaire.

2) Pour tout x > 0, on pose $g(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)}dt.$

a/ Vérifier que $F(x) = g(2x) - g(x)$; pour tout x > 0.

b/ Montrer que g est dérivable sur IR*+ puis calculer F'(x) pour tout x > 0.

c/ En Déduire le sens de variations de F sur]0, +∞[.

3) a/ Montrer que pour tout x > 0, il existe un réel $c \in]x, 2x[$ tel que $F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$.

b/ Déduire que, pour tout x > 0 ;

$\frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$.

c/ Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)$.

4) a/ Dresser le tableau de variations de F.

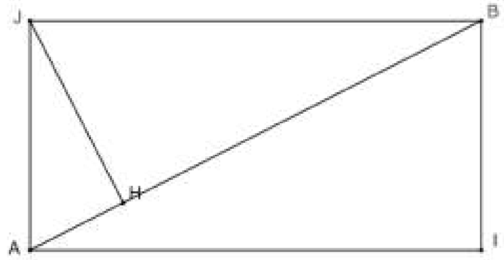
b/ Tracer l'allure de la courbe C de F dans un repère orthonormé.

(On donne $F(\sqrt{2}) \cong 0.7$)

Exercice 34 :

Soit AIBJ un rectangle de sens direct tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AJ}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Soit H le projeté orthogonal de J sur (AB)



1)a)Caractériser la similitude directe s telle que s(B) = J et s(J) = A

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de sos.

2)Soit s' la similitude directe de centre B et telle que s'(I)= J

a)Déterminer l'angle et le rapport de s'

b) Soit K l'image de H par $t_{\overrightarrow{JB}}$ Caractériser sos' et déduire que s'(K)= H .

3) Soit g la similitude indirecte telle que g(B) = J et g(J) = A et soit H' le symétrique de H par rapport à (AJ)

a) Justifier que g admet un centre Ω

b)Caractériser gog et déduire que Ω ∈(AB)

c) Soit $\sigma = gos^{-1}$ .caractériser σ et déduire g(H)

d)Montrer que Ω appartient à (JH') construire alors Ω et l'axe de g

4) le plan est maintenant muni d'un repère orthonormé direct (A , $\vec{u},\vec{v}$) tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AJ}$

a) Montrer que $\sqrt{3} + i$ est l'affixe du point B.

b) Donner la *forme* complexe de g.

c) En déduire l'affixe de Ω et donner une équation de l'axe de g.

Exercice n° : 35 (4.5 points)

On considère l'équation différentielle

(E) : $y' + 2y = (2x+1)e^{-2x}$

1°) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.

2°) Soient a et b deux réels et soit g la fonction définie par : $g(x) = (ax^2 + bx)e^{-2x}$.

Déterminer a et b pour que g soit solution de l'équation (E).

3°) Soit f une fonction dérivable sur IR et u la fonction définie par : $u(x) = (x^2 + x)e^{-2x}$

a) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si f - u est solution de (E').

b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

c) Déterminer la solution de l'équation (E) qui s'annule en 0.