Exercice :1

Les questions suivantes sont indépendantes.

1)Soit ABCD un carré direct de centre O.

On considère l'application $f = S_{AC} o t_{\overrightarrow{AB}}$

Déterminer f(A) et f(D). En déduire que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

2)Soit g une fonction dérivable sur IR telle que $g(1)=\frac{-1}{4}$ et $g'(1) = \frac{1}{4}$

Calculer $\lim_{x\to 1}\frac{\tan(\pi g(x))+1}{x-1}$

3)Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x\right)$

Exercice :2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$), on donne les points A, B et C d'affixes respectives 1 + i, 1 + 2i et 2 + 2i.

Soit φ l'application du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z',

défini par $-2\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{M'M_1}=\vec{O}$ où M_1 est le symétrique de M par rapport à l'axe des réels.

1°) Montrer que OICB est un parallélogramme de centre A.

2°)a) Montrer que $z' = -\bar{z}+2+2i$

b) Donner la nature de φ.

3°)a) Montrer que $\varphi = S_A o S_{OI}$ où S_A désigne la symétrie centrale de centre A.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de φ.

Exercice 3 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$),.

1) Résoudre dans C l'équation :

(E) :$z^2 - iz\left(1-e^{i\theta}cos\theta\right)+e^{i\theta}cos\theta = 0, \theta\in IR$

2) On considère les points A, B et M d'affixes respectives i, $\frac{i}{4}$ et $\frac{1}{i+\tan(\theta)}$, $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

On note N le milieu du segment [AM].

a)Montrer que $z_N = \frac{1}{4}(\sin(2\theta)+2i\sin^2(\theta))$.

b)Prouver que, lorsque θ varie dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, le point N varie sur le cercle Γ de centre B et de rayon $R = \frac{1}{4}$ privé d'un point à déterminer.

c)En déduire l'ensemble des points M, lorsque θ varie dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

d)Ecrire z_M sous forme exponentielle.

Exercice :4

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies sur IN par : $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_n = \frac{7}{u_n}$.

1°) Montrer par récurrence que pour tout n de IN, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

2°)a) Démontrer que quel que soit n de IN, $(u_n+v_n)^2 - 28 = (u_n-v_n)^2$

b) En déduire que quel que soit n de IN, $u_{n+1}-v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n-v_n)^2$.

c) Conclure que quel que soit n, on a : $u_n - v_n \geq 0$.

3)a) Prouver que la suite (u_n) est décroissante

b) En déduire que la suite (v_n) est croissante.

4)a) En s'aidant de la question 2.c et de la question 3.b, démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \geq \frac{21}{8}$.

b) Utiliser le résultat précédent et le résultat de 2.b pour démontrer que pour tout n de IN,

$u_{n+1}-v_{n+1} \leq \frac{1}{10}(u_n-v_n)^2$

c) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout n de IN,$u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2^n-1}}$

d) Déduire la limite de $u_n - v_n$ lorsque n tend vers +∞.

5°) Conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

Exercice : 5

Répondre par vrai ou faux

1) n est un entier naturel ayant pour écriture aba7 en base dix.

n est divisible par 7 ⇔ a + b ≡ 0 (mod 7)

2) $\lim_{x\to+\infty} e^x\ln(1+e^{-x}) = 0$

3) Soit a et b deux entiers tels que 4a +3b = 5 alors pgcd(a, b) = 5.

4) Si un entier n est divisible par 4 et par 6 alors il est divisible par 12.

Exercice :6

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Soit O le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC, I le milieu du segment [BC], J le milieu du segment [AB] et L le milieu du segment [AC]

1) Montrer que OBAC est un losange.

2)a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que f(A) = C et f(B) = A.

b)Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

c)Montrer que $f = R_{(O,\ \frac{-\pi}{3})} o S_{AB}$.

d)Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de $R_{(O,\ \frac{\pi}{3})} o\ t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$.

3°) Soit l'isométrie $\varphi = S_{BC}\ o\ S_{AC}\ o\ S_{AB}$.

a)Montrer que $S_{AC}\ o\ S_{AB} = S_{AO}\ o\ S_{AC}$..

En déduire que $\varphi = S_{IK}\ o\ S_{IJ}\ o\ S_{AC}$. où K est le projeté orthogonal de I sur (AC).

b)Montrer alors que φ est une symétrie glissante dont précisera l'axe et le vecteur.

4°) Soit g une isométrie du plan qui laisse globalement invariant le triangle ABC.

a)Montrer que g fixe le point O.

b)Montrer que g([BC]) = [BC].

c)Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABC.

Exercice :7

Pour tout n ≥ 1, $I_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{1-t}dt$, x ∈ IR

1)Calculer $I_1(x)$

2)a)En intégrant $I_n(x)$ par parties,
Calculer $I_{n+1}(x) – I_n(x)$, (n ≥1)

b)Déduire que $I_n(x)= e – (1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!})e^{1-x}$.

3)On suppose maintenant que x est un élément fixé de]0, 1]

a)Démontrer que, pour tout n > 0,

$0 \le I_n(x) \le \frac{1}{n\,!} e\,(1-e^{-x})$

b)Déduire alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x)$

c)Montrer alors que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}(\frac{x^k}{k!}) = e^x$.

Exercice : 8

I) On considère, dans IC, l'équation ;

(E) : $z^2 - e^{i\theta}z - i + e^{-i2\theta} = 0, \theta \in]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}[$

1) Développer $(e^{i\theta} + 2ie^{-i\theta})^2$

2) Résoudre dans IC l'équation (E)

II) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) .

On considère les points A, M et N d'affixes respectives :

$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_M = e^{i\theta} + ie^{-i\theta}$ et $z_N = -ie^{-i\theta}$.

1) Déterminer la forme exponentielle de z_M .

2) Montrer que M décrit le segment [OA] privé des points O et A, lorsque θ varie.

3) Déterminer et construire l'ensemble γ des points N lorsque θ varie.

4) Soit H le point d'affixe $z_H = -\frac{z_M}{2}$.

a) Vérifier que $z_N - z_H = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

b) Montrer que H est le projeté orthogonal de N sur (OA).

c) Déterminer θ pour que l'aire du triangle OMN soit maximale.

Exercice 9:

1°) On considère, dans l'ensemble des nombres complexes , l'équation :

(E) : $z^2 + (\sqrt{3} + 7i)z - 4(3 - i\sqrt{3}) = 0$.

On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E) telles que $Re(z_1) < Re(z_2)$.

a) Sans résoudre l'équation (E), Montrer que :
$|z_1z_2| = 8\sqrt{3}$ et $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$

b) M que $(\sqrt{3} - i)^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$.

c) Résoudre, dans £ , l'équation (E).

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) , on donne les points A, B et C d'affixes respectives

a = -2i, b = $-\sqrt{3} - 3i$ et c = - 4i.

a)Déterminer la forme exponentielle de b.

b)Placer les points A, B et C.

c)Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$\arg(z + 2i) \equiv \frac{-2\pi}{3}[2\pi]$.

d) Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z+4i}{z+2i}$ soit imaginaire.

Exercice 10:

Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(x) = (1 - x)e^{2x}$. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1°) Dresser le tableau de variation de f.

2°)a) Montrer que $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion I qu'on précisera.

b)Donner une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point I.

c)Tracer T et $\mathscr{C}$.

3)Calculer l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x= 1.

4°)On pose $I_n = \int_0^1 (1 - x)^n e^{2x}dx$; $\forall\, n > 0$, ∀n∈IN*

a)Mque ∀n∈IN*, on a : $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e^2}{1+n}$

En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$

b)M que ∀n∈IN*, on a : $2I_{n+1} = -1 + (n + 1)I_n$.

En déduire.$\lim_{n\to+\infty} nI_n$

5°) Pour tout n∈IN*,$u_n = \frac{2^n}{n!}I_n$.

a)M par récurrence que ∀n∈IN*, on a : $\frac{2^{n-1}}{n!} \le 1$.

b)En déduire que ∀n∈IN*, on a : $u_n \le \frac{2e^2}{(n+1)}$.

a) Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

6°)a)Mque ∀n∈IN*, on a : $u_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + u_n$.

b)En déduire que ∀n∈IN*, on a :

.$u_n = \frac{1}{2}[e^2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}]$

c)En déduire $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}$

Exercice 11 :

La musique est une mathématique sonore,
la mathématique est une musique silencieuse. *Edouard Herriot*

A)Soit la fonction f définie sur]-1, 1[par :

$f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2}dt$

1)a)Justifier l'existence de f.

b)Prouver qu'il existe trois réels α, β et φ tel que

$\forall t \in IR - [-1, 1\}, \frac{t^2}{1-t^2} = \alpha + \frac{\beta}{1-t} + \frac{\varphi}{1+t}$

c)Déduire que $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = -x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

2)Etudier les variations de f et construire sa courbe C dans un repère orthonormé.

3)a)Montrer que $\forall x \in IR^*_+$ et $\forall k \in IN^*$ on a :

$\ln(x) \leq -1 + \frac{x}{k} + \ln k$

b)Déduire que $\forall k \in IN^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+k} \ln x dx \leq \ln k$.

et que $\forall n \in IN^* \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+n} \ln x dx \leq \ln(n!)$

c)En déduire que $\forall n \in IN^*$,

$\ln(n!) \geq (n + \frac{1}{2})\ln(n+\frac{1}{2}) - n + \frac{1}{2}\ln 2$

4)Soit la suite u définie par sur IN* par :

$u_n = n + \ln(n!) - (n + \frac{1}{2})\ln(n)$

a)Montrer que $\forall n \in IN^*$, $u_n \geq \frac{1}{2}\ln 2$,

b)Vérifier que $\forall n \geq 1$, on a: $u_n - u_{n+1} = (2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$

c)Déduire que la suite u est convergente.

B)Soit (v_n) la suite définie par :

$V_0 = \int_0^1 \sqrt{(1-x)}\,dx$ et $\forall n \in IN^*$, $V_n = \int_0^1 x^{n/2}\sqrt{1-x}dx$

1)Calculer v_0

2)a)Définir l'ensemble des points M(x,y) tel que $y^2 - x(1-x) = 0$.

b)Déduire que $v_1 = \frac{\pi}{8}$

3)a)Prouver que la suite (v_n) est décroissante .

b)Déduire que la suite v est convergente.

4)a)Prouver par une intégration par partie que

$\forall n \in IN$, $v_{n+2} = \frac{n+2}{n+5}v_n$

b)Déduire que $\forall n \in IN$, $\frac{n+2}{n+5} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$

Exercice 12 :

I/Soit x un réel de]-1, + ∞[, on pose $\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt$

1)a) $x \in IR_+$, mque, $0 \leq \varepsilon(x) \leq \frac{x^3}{3}$

b) $x \in]-1, 0]$, mque $\frac{x^3}{3(1+x)} \leq \varepsilon \leq 0$

c) En déduire que $\lim_{x\to 0} \frac{\varepsilon(x)}{x^2} = 0$

2)a) Démontrer que pour tout x de]-1, +∞[

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x)$

b)Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

3) Soit f la fonction numérique à variable réelle définie sur]-1, +∞[par $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

a) Mque f est continue et dérivable sur]-1, +∞[

b) Etudier les variations de la fonction h définie sur]-1, +∞[par $h(x) = x - (x+1)\ln(1+x)$

En déduire le signe de h(x) pour $x \in]-1, +\infty[$

c)Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère

orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

II/ Soit $x \in]-1, 0]$ et $n \in IN^*$, on pose $\varepsilon_n = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$

1)Etudier le signe de $\varepsilon_n(x)$ suivant n est pair ou impair.

b)Etudier le signe de $\varepsilon_n(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(x+1)}$,

en déduire que $|\varepsilon_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(x+1)}$

2)a) Mque $\forall t \neq -1$

$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$

b)En déduire que $\forall x$ de]-1, 0] et pour tout n de IN*

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\varepsilon_n(x)$

3) On considère la suite u définie par:

$u_n = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} + \dots + \frac{1}{n2^{n-1}}\right]$

Trouver $\lim_{n\to+\infty}(u_n)$

Exercice 13 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct (O, u, v). Soit $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

1) Résoudre dans C l'équation :$z^2 - 2z + 2 = 0$

2) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = (1+i)e^{i\alpha}$ et $z_C = (1-i)e^{i\alpha}$.

a) Écrire z_B et z_C sous forme exponentielle.

b) En déduire que le triangle OBC est rectangle isocèle en O.

c) Pour quelle valeur de α le quadrilatère OABC est-il un parallélogramme ?

3) À tout point M(z) on associe le point M'(z') tel que $z' = 2 + (z-2)^2$

On note C le cercle de centre K(2) et de rayon $\sqrt{2}$.

a) Déterminer z' pour $z = z_A$.

b) Soit M le point de C d'affixe $z = 2 + \sqrt{2}\,e^{i\alpha}$

Montrer que l'affixe de M' est $2 + 2\,e^{i2\alpha}$

Déterminer et construire , l'ensemble des points M' lorsque α varie dans $[0, \frac{\pi}{2}]$

4) Soit N le point d'affixe $z_N = 2+\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}$
et N' le point associé à N.
a) Écrire $z_N - 2$ sous forme exponentielle; en déduire que N est un point de C .
b) Montrer que : $(\vec{u}, \overrightarrow{KN'}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$
c) Placer N sur la figure puis construire le point N'.

Exercice 14 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$) .
1) a)Montrer que f est définie sur [1, + ∞[.
b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement.
2) a. Montrer que f est dérivable sur]1, +∞[et que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

b)Dresser le tableau de variation de f.
3) a. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
b. Tracer la courbe (C).
4) a. Montrer que f est bijective et tracer, dans le même repère, la courbe (C ') de sa fonction réciproque f^{-1} .
b)Montrer que pour tout $x\in IR_+$, $f^{-1}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
5) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives: x = 1 et x = 2.

Exercice 15 :

On considère la suite définie sur IN* par
$u_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$.
1) a) Montrer que pour tout n∈IN*, $u_n \geq 0$.
b) Montrer que U est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.
2) a) En intégrant par parties, calculer u_1.
b) Montrer que pour tout n∈IN*,
$u_{n+1} - (n+1)u_n = \frac{-1}{e}$
c) En déduire la valeur de u_2.
3) a) Montrer que pour tout n∈IN* , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{ne}$
b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 16:

1) Soit h la fonction définie sur]0,+∞[par :
h(x)=aln²(x)+blnx ; a et b deux réels.
Déterminer les réels a et b sachant que h admet un minimum en $e^{\frac{1}{2}}$ égale à $(\frac{-1}{4})$.
2) Soit f la fonction définie sur]0,+∞[par :
$f(x) = \ln^2 x - \ln x$. On désigne par C la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé (o,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$).
a- Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
b- Montrer que tout $x \in]0,+\infty[$; $f'(x) = \frac{-1+2\ln x}{x}$.
c- Dresser le tableau de variation de f.
d- Préciser les points d'intersection de c avec l'axe des abscisses.
e- Tracer la courbe c.
(On précisera les branches infinies).
3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]0, e^{\frac{1}{2}}]$.
a- Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g.
b- Montrer que l'équation g(x) = x admet dans I une unique solution α et que α ∈]0,1] .
c- Tracer la courbe c' de g^{-1} dans le même repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

d- Montrer que tout x ∈ J ; $g^{-1}(x) = e^{\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}}$.
4) Soit A=$\int_\alpha^1 f(x)dx$..
a- Interpréter graphiquement A
b- Calculer A.

c- En déduire la valeur de K=$\int_0^\alpha e^{-\sqrt{x+\frac{1}{4}}}dx$.

Exercice :17

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$
Soit O le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC, I le milieu du segment [BC], J le milieu du segment [AB] et L le milieu du segment [AC]
1°) Montrer que OBAC est un losange.
2°)a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que f(A) = C et f(B) = A.
a)Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.
b)Montrer que. $f = R_{(O,\frac{-\pi}{3})} o S_{AB}$

b)Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de $R_{(O,\frac{\pi}{3})} o t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$

3°) Soit l'isométrie $\varphi = S_{BC} o S_{AC} o S_{AB}$.
a)Montrer que $S_{AC} o S_{AB} = S_{AO} o S_{AC}$.
En déduire que $\varphi = S_{IK} o S_{IJ} o S_{AC}$ où K est le projeté orthogonal de I sur (AC).
b)Montrer alors que φ est une symétrie glissante dont précisera l'axe et le vecteur.

4°) Soit g une isométrie du plan qui laisse globalement invariant le triangle ABC.
a)Montrer que g fixe le point O.
b)Montrer que g([BC]) = [BC].
c)Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABC.

Exercice 18 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct (O,$\vec{u}$, $\vec{v}$) . Soit A(i) et B(i+1).
On considère l'application
f:P\{A}$\to$P :M(z) $\to$M'(z') tel que z'- i = $\frac{2}{\bar{z}+i}$.
1)Montrer que les points A, M et M' sont alignés.
2)Déterminer l'ensemble ζ des points invariants par f
3)Dans cette question, on suppose que z=1+i+$e^{i\theta}$
a)Déterminer et construire l'ensemble Γ décrit par le point M d'affixe z lorsque θ décrit $]\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}[$
b)Montrer que z'- i=1+i tan $\frac{\theta}{2}$.
c)En déduire l'ensemble Γ' image de Γ par f. Le construire.

Exercice 19 : (5 points)

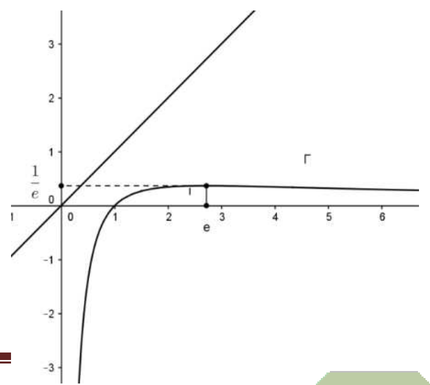
Soit F la fonction définie sur [0, +∞[par :
F(x)=$\int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2}\,dt$ si x > 0 et F(0) = -ln2
1°)a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel x > 0,
F(x)= $\frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$.
b) Montrer que pour tout réel x > 0,
$e^x \ln 2 \le \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt \le e^{2x} \ln 2$
c) Calculer $\lim_{x\to 0+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$.
En déduire que F est continue à droite en 0.
2°)a) Montrer que pour tout réel x > 0,F(x)≤ $\frac{-e^x+1}{2x}$
b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$
3°) Montrer que F est dérivable sur]0, +∞[et pour tout réel x > 0, F'(x) = $\frac{-1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2$
4°) Soit x un réel strictement positif.
a) Montrer qu'il existe un réel c de]0 , x[tel que F(x) - F(0) = $xF'(c)$
b) En déduire que F est dérivable à droite en 0.
c) Dresser le tableau de variation de F et tracer sa courbe représentative.

Exercice 20:

I/ On considère la fonction f définie sur] 0 , +∞ [par
f (x) = $\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}$
et on désigne par ζ_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé ($O,\vec{i},\vec{j}$).
1) a) Dresser le tableau de variation de f .
b) Tracer ζ_f .
2) Calculer l'aire de la région du plan limité par la courbe ζ_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = $\frac{1}{e}$; x = 1 .
II/ On pose pour tout n∈ IN* ,
$I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{(\ln x)^n}{x\sqrt{x}}\,dx$
1) a) Calculer I_1.
b) Mque $\forall\, n > 0;\ |I_n| \le \frac{1}{n!2^n}$
c)Calculer la limite de I_n .
2) En intégrant par partie, montrer que pour tout n de IN* on a $I_{n+1} = I_n + \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{e}}{(n+1)!2^{n+1}}$
3) a) Montrer que pour tout n de IN*,
$I_n = -1 + \sqrt{e}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!2^k}$
b) En déduire la limite de la somme :
$S_n = 1 - \frac{1}{1!2} + \frac{1}{1!2^2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!2^n}$

Exercice 21 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur]0, +∞[par :
$f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$
On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé.
1) a) Calculer $\lim_{x\to 0+} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x$
b) En déduire que la courbe C admet deux asymptotes que l'on précisera.
c) Etudier la position de C par rapport à la droite ∆ : y = x.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) a) Montrer que C admet une unique tangente D parallèle à ∆. Préciser les coordonnées du point de contact B.
b) Donner une équation de D.
4) Dans la figure ci dessous, On a tracé la droite ∆ : y = x et la courbe Γ : $y = \frac{\ln x}{x}$



a) Construire le point A($\frac{1}{e}$, 0) et vérifier que A appartient à D.
b) Tracer la droite D et placer le point B.
c) Tracer C.
5) Calculer l'aire de la partie du

plan limitée par C, la droite Δ et les droites d'équations : $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$

Exercice : 22

Soit f la fonction définie sur $]-\ln 2, +\infty[$ par :

$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{2e^{x}-1}}$ **et** g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = -\ln(1+\sin x)$.

1) a)Dresser le tableau de variations de g

b)Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $]-\ln 2, +\infty[$

c)Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-\ln 2, +\infty[$ et que $(g^{-1})'(x) = f(x)$

2). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, on pose

$F_n(x) = \int_0^x (f(t))^{2n}\, dt$

a)Donner le sens de variations de F_n

b)Calculer $F_1(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x) = \ln 2$

c)Mque pour tout réel $t \geq 0$; $-e^{\frac{-t}{2}} \leq f(t) \leq 0$

d)En déduire que $F_n(x) \leq \frac{1}{n}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$ est finie.

3. On pose $U_n = \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$.

On se propose dans la suite de déterminer U_n.

a)Mque $F_{n+1}(x) + F_n(x) = -\frac{1}{n}\left[(f(x))^{2n} - 1\right]$

b) En déduire que $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n}$

5. On pose $W_n = (-1)^n U_n$; $n \in \mathbb{N}^*$.

Vérifier que : $W_{n+1} - W_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

En déduire que pour $n \geq 2$;

$u_n = (-1)^n \left[-\ln 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right]$.

Exercice 23: (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = t\,e^{-t}$

1) a) Dresser le tableau de variations de f.

En déduire que f est bornée.

b) Montrer alors que pour tout réel $t \geq 0$,

on a: $f(t)e^{\frac{t}{2}} \leq 1$.

2) Pour tout entier $n \geq 1$, on note F_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$F_n(x) = \int_0^x [f(t)]^n\, dt$.

a) Prouver que $[f(t)]^n \leq e^{-\frac{t}{2}}$. On pourra utiliser la question 1).

b) En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $F_n(x) \leq 2$.

c) Prouver alors que $F_n(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

3) Pour tout entier $n \geq 1$, on définie la fonction G_n sur $[0, +\infty[$ par $G_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}\, dt$.

a) Expliciter $G_1(x)$.

b) Montrer que $G_{n+1}(x) = (n+1)\,G_n(x) - x^{n+1}e^{-x}$.

c) En déduire, en raisonnant par récurrence, que $\lim\limits_{x\to+\infty} G_n(x) = n\,!$.

4) a) Montrer que $(G_n)'(nx) = n^n\,[f(x)]^n$.

b) Prouver alors que $F_n(x) = \frac{1}{n^{n+1}}\, G_n(nx)$.

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$.

Exercice 24 (2,5points)

Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par :

$f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^4}}$.

1) Soit F la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par :

$F(x) = H(\sqrt{\sin(2x)})$

où H la primitive de f qui s'annule en 0.

a)M que F est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ et déterminer $F'(x)$

b) En déduire que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

on a : $F(x) = x - \frac{1}{2}\tan(x)$.

c)Déterminer alors $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(t)\,dt$

2) Pour tout $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ on pose :

$G(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,dt$. Etudier la parité de G

Exercice :25 (3,5points)

On se propose de résoudre dans IN l'équation

$(E): x^{53} \equiv 3 \pmod{37}$

1) Soit x solutions de (E)

a) Montrer que x et 37 sont premiers entre eux.

b) Montrer que :

$x^{36} \equiv 1 \pmod{37}$ et que $x \equiv 3^{17} \pmod{37}$

2)a) Soit $x \in \mathbb{N}$

M que si $x \equiv 3^{17} \pmod{37}$ alors x est solution de (E)

b) En déduire que l'ensemble des solutions de (E) dans IN est $\{37k + 25 ; k \in \mathbb{N}\}$

3) Soit x une solution de (E).

On pose $S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{52}$

a) Vérifier que $(x-1)S = x^{53} - 1$

En déduire que $12S \equiv 1 \pmod{37}$

b) Déterminer alors le reste modulo 37 de S

Exercice : 26 (4points)

Soit la fonction f définie sur IR+ par

$f(x) = \ln\left(\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right)$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, i, j) du plan.

1a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que f est dérivable sur IR*+ et que $\forall$ x >0, $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}$.

c) Dresser le tableau de variation de f construire C_f.

2)a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie IR+.

b) Soit x $\in$IR*+. Résoudre dans IR+ l'équation en y : $e^y+e^{-y}-2=x$.

Expliciter alors $g(x)$ pour x $\in$IR+.

3) Soit h une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I.

a) Montrer que h^{-1} admet des primitives sur $h(I)$.

b) Soit α et β deux réels de I.

Montrer que $\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} h^{-1}(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta} th'(t)dt$.

4)a) Calculer $f(0)$ et $f\left(\frac{(e-1)^2}{e}\right)$.

b)On désigne par A l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droite d'équations $x=0$, $x=\frac{(e-1)^2}{e}$ et $y=0$. Montrer que A $=\frac{2}{e}(u.a)$

Exercice :27

On considère la suite U définie sur IN par :

$\begin{cases} U_0=U_1=1 \\ U_{n+2}=U_{n+1}+U_n \quad ;\text{pour tout } n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1/ Montrer que pour tout n$\in$IN, $U_n \geq n$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

2/ Soit W la suite définie sur IN* par $W_n=U_n^2-U_{n+1}.U_{n-1}$

a/ Montrer que W est une suite géométrique de raison (-1)

b/ En déduire que pour tout n$\in$IN*,

$U_n^2-U_{n+1}.U_{n-1}=(-1)^n$

3/ On considère la suite V de terme général $V_n=\frac{U_{n+1}}{U_n}$

a/ Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(V_{n+1}-V_n)=0$

b/ Etablir l'égalité : $V_{n+1}-V_{n-1}=\frac{(-1)^{n+1}}{U_{n+1}.U_{n-1}}$, et en déduire la monotonie de la suite (V_{2n}) et celle de la suite (V_{2n+1}) .

c/ Montrer que pour tout n$\in$IN, $V_{2n}\leq V_{2n+1}$

d/ En déduire que les suites (V_{2n}) et (V_{2n+1}) sont convergentes et quelles convergent vers la même limite.

e/ En déduire que la suite (V_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice :28(6points)

1)Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1-x+x\ln x$.

a)Etudier les variations de g .

b) En déduire que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $1+x\ln x\geq x$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{1+x\ln x} \quad si\ x>0 \\ f(0)=1\end{cases}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé(O, i, j).

a) Montrer que f est continue à droite en 0.

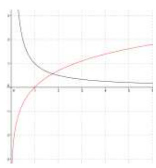
b) Montrer que $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-1}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement.

c)Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.

3)a)Mque pour tout $x\in]0,+\infty[$ $f'(x)=\frac{1+\ln x}{(1+x\ln x)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

4) Dans la **figure ci dessous**, on a tracé dans un repère orthonormé (O, i, j), les courbes C_1 et C_2 des fonctions définies sur $]0,+\infty[$ respectivement par $x\longmapsto \ln x$ et $x\mapsto\frac{1}{x}$.



a) Construire le point A de C_1 d'abscisse $\frac{1}{e}$ et le point B de C_2 d'abscisse $1-\frac{1}{e}$.

En déduire une construction du point C de Cf d'abscisse $\frac{1}{e}$

b) Déduire de la question **1-b)** que pour tout x >0 , $f(x) \le \frac{1}{x}$.

Déterminer alors la position relative de Cf et C_2

c) Tracer la courbe C_f .

5) On considère la fonction F définie sur $[1,+\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

a) que pour tout $t \in [1,+\infty[$,$\frac{1}{t+t\ln t} \le f(t)$.

b) Montrer alors que pour tout $x \in]0,+\infty[$,$\ln(1+\ln x) \le F(x) \le \ln x$

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$.

6) Soit n un entier naturel non nul ;

a) Montrer que la fonction $h: x \mapsto x - F(x)$ est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.

b) En déduire que l'équation $h(x) = n$ admet dans $[1,+\infty[$ une seule solution α_n.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$.

d) Vérifier que $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{1-\frac{F(\alpha_n)}{n}}$.

Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n}$.

Exercice:29

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O, u, v) Soient les points A et B du plan d'affixes respectives z1 et z2 tels que O, A et B ne sont pas alignés. On considère le point M d'affixe z vérifiant la relation : $z = \frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

I/ 1) Montrer que : $\frac{z_2-z}{z_1-z} = -\frac{z_2}{z_1}$

2) Montrer que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv \pi + (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})[2\pi]$

3) En déduire que M appartient au cercle C circonscrit au triangle OAB.

II) On suppose de plus que z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation :

$(E_\theta): z^2 - 2(e^{i\theta}+1)z + 2e^{i\theta} - 2 = 0, \theta \in]0,\pi[$.

1)a) Montrer que $z = 2\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$.

b) Donner la forme algébrique de z .

c) Déterminer alors l'ensemble des points M lorsque θ décrit]0, π[.

Pour la suite on prendra $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

On pose $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{12}}z_1$ et $Z_2 = e^{i\frac{\pi}{12}}z_2$. z_1 et z_2 sont les solutions $\left(E_{\frac{2\pi}{3}}\right)$

On désigne par A' , B' et C' les points d'affixes respectives Z_1 , Z_2 et $Z_{M'} = e^{i\frac{\pi}{12}}Z_M$.

3)a) Soit K et K' les milieux respectifs des segments [AB] et [A'B'].

Vérifier que $z_K = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_{K'} = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

b) En remarquant que $(Z_2-Z_1)^2 = (Z_2+Z_1)^2 - 4Z_1Z_2$, vérifier que $(Z_2-Z_1)^2 = 4((Z_{K'})^2\left(i\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^2$.

c) Montrer que $(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{K'E})+(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{K'F}) \equiv 0\ [\pi]$ où E et F sont les points d'affixes $Z_F = -Z_E$.

En déduire que la droite (A'B') porte la bissectrice intérieure de l'angle EK'F.