La musique est une mathématique sonore,
la mathématique est une musique silencieuse. — *Edouard Herriot*

Exercice :1

Les questions suivantes sont indépendantes.

1)Soit ABCD un carré direct de centre O.

On considère l'application $f = S_{AB} o t_{\overrightarrow{AB}}$

Déterminer f(A) et f(D). En déduire que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

2)Soit g une fonction dérivable sur IR telle que $g(1)=\frac{-1}{4}$ et $g'(1) = \frac{1}{4}$

Calculer $\lim_{x\to 1} \frac{\tan(\pi g(x))+1}{x-1}$

3)Calculer $\lim_{x\to +\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - x)$

Exercice :2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$), on donne les points A, B et C d'affixes respectives 1 + i, 1 + 2i et 2 + 2i.

Soit φ l'application du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', défini par $-2\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{M'M_1} = \vec{O}$ où M_1 est le symétrique de M par rapport à l'axe des réels.

1°) Montrer que OICB est un parallélogramme de centre A.

2°)a) Montrer que z' = $-\bar{z} + 2 + 2i$

b) Donner la nature de φ.

3°)a) Montrer que $\varphi = S_A o S_{OI}$ où S_A désigne la symétrie centrale de centre A.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de φ.

Exercice 3 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$),.

1) Résoudre dans C l'équation :

(E) :$z^2 - iz\left(1 - e^{i\theta}cos\theta\right) + e^{i\theta}cos\theta = 0, \theta \in IR$

2) On considère les points A, B et M d'affixes respectives i, $\frac{i}{4}$ et $\frac{1}{i+\tan(\theta)}$, $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

On note N le milieu du segment [AM].

a)Montrer que $z_N = \frac{1}{4}(\sin(2\theta) + 2i\sin^2(\theta))$.

b)Prouver que, lorsque θ varie dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, le point N varie sur le cercle Γ de centre B et de rayon R = $\frac{1}{4}$ privé d'un point à déterminer.

c)En déduire l'ensemble des points M, lorsque θ varie dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

d)Ecrire z_M sous forme exponentielle.

Exercice :4

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies sur IN par : $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_n = \frac{7}{u_n}$.

1°) Montrer par récurrence que pour tout n de IN, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

2°)a) Démontrer que quel que soit n de IN, $(u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2$

b) En déduire que quel que soit n de IN, $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$.

c) Conclure que quel que soit n, on a : $u_n - v_n \geq 0$.

3)a) Prouver que la suite (u_n) est décroissante

b) En déduire que la suite (v_n) est croissante.

4)a) En s'aidant de la question 2.c et de la question 3.b, démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \geq \frac{21}{8}$.

b) Utiliser le résultat précédent et le résultat de 2.b pour démontrer que pour tout n de IN,

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2$$

c) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout n de IN,$u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2^n-1}}$

d) Déduire la limite de $u_n - v_n$ lorsque n tend vers +∞.

5°) Conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

Exercice : 5

Répondre par vrai ou faux

1) n est un entier naturel ayant pour écriture aba7 en base dix.

n est divisible par 7 ⇔ a + b ≡ 0 (mod 7)

2) $\lim_{x\to+\infty} e^x \ln(1+e^{-x}) = 0$

3) Soit a et b deux entiers tels que 4a +3b = 5 alors pgcd(a, b) = 5.

4) Si un entier n est divisible par 4 et par 6 alors il est divisible par 12.

Exercice :6

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Soit O le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC, I le milieu du segment [BC], J le milieu du segment [AB] et L le milieu du segment [AC]

1) Montrer que OBAC est un losange.

2)a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que f(A) = C et f(B) = A.

b)Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

c)Montrer que $f = R_{(O, \frac{-\pi}{3})} o S_{AB}$.

d)Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de $R_{(O, \frac{\pi}{3})} o\ t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$.

3°) Soit l'isométrie $\varphi = S_{BC}\ o\ S_{AC}\ o\ S_{AB}$.

a)Montrer que $S_{AC}\ o\ S_{AB} = S_{AO}\ o\ S_{AC}$..

En déduire que $\varphi = S_{IK}\ o\ S_{IJ}\ o\ S_{AC}$. où K est le projeté orthogonal de I sur (AC).

b)Montrer alors que φ est une symétrie glissante dont précisera l'axe et le vecteur.
4°) Soit g une isométrie du plan qui laisse globalement invariant le triangle ABC.
a)Montrer que g fixe le point O.
b)Montrer que g([BC]) = [BC].
c)Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABC.

Exercice :7

Pour tout n ≥ 1, $I_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{1-t}dt$, $x \in$ IR
1)Calculer $I_1(x)$
2)a)En intégrant $I_n(x)$ par parties,
Calculer $I_{n+1}(x) - I_n(x)$, (n ≥1)
b)Déduire que $I_n(x) = e - \left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)e^{1-x}$.
3)On suppose maintenant que x est un élément fixé de]0, 1]
a)Démontrer que, pour tout n > 0,
$0 \le I_n(x) \le \frac{1}{n\,!}\, e\,(1-e^{-x})$
b)Déduire alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x)$
c)Montrer alors que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{x^k}{k!}\right) = e^x$.

Exercice :(7 bis)

I) On considère, dans IC, l'équation ;
(E) : $z^2 - e^{i\theta}z - i + e^{-i2\theta} = 0, \theta \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$
1) Développer $(e^{i\theta} + 2ie^{-i\theta})^2$
2) Résoudre dans IC l'équation (E)
II) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A, M et N d'affixes respectives :
$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_M = e^{i\theta} + ie^{-i\theta}$ et $z_N = -ie^{i\theta}$.
1) Déterminer la forme exponentielle de z_M .
2) Montrer que M décrit le segment [OA] privé des points O et A, lorsque θ varie.
3) Déterminer et construire l'ensemble γ des points N lorsque θ varie.
4) Soit H le point d'affixe $z_H = -\frac{z_M}{2}$.
a) Vérifier que $z_M - z_M = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
b) Montrer que H est le projeté orthogonal de N sur (OA).
c) Déterminer θ pour que l'aire du triangle OMN soit maximale.

Exercice 8:

1. Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers 14n + 3 et 5n + 1 sont premiers entre eux.
2. On considère l'´equation (E) : 87x + 31y = 2
(a) Vérifier, en utilisant par exemple la question 1. que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple (u ; v) d'entiers relatifs tel que 87u + 31v = 1 puis une solution $(x_0 ; y_0)$ de (E).
(b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans Z^2.
(c) Application : Déterminer les points de la droite d'´equation 87x−31y−2 = 0 dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.

Exercice 9:

1°) On considère, dans l'ensemble des nombres complexes , l'équation :
(E) : $z^2 + (\sqrt{3} + 7i)z - 4(3 - i\sqrt{3}) = 0$.
On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E) telles que $Re(z_1) < Re(z_2)$.
a) Sans résoudre l'équation (E), Montrer que :
$|z_1z_2| = 8\sqrt{3}$ et $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$
b) M que $(\sqrt{3} - i)^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$.
c) Résoudre, dans £ , l'équation (E).
2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$) , on donne les points A, B et C d'affixes respectives
a = -2i, b = $-\sqrt{3} - 3i$ et c = - 4i.
a)Déterminer la forme exponentielle de b.
b)Placer les points A, B et C.
c)Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
$\arg(z + 2i) \equiv \frac{-2\pi}{3}[2\pi]$.
d) Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z+4i}{z+2i}$ soit imaginaire.

Exercice 10 :

Soit ABCD un carré de centre O tel que.
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
On désigne I = A ∗ B et J = A ∗ D
On note s la similitude directe tels que
s(D) = O et s(C) = I.
1) a) Déterminer le rapport et l'angle de s.
b) Soit Ω le centre de s.
Trouver une construction géométrique de Ω .
2) a) Préciser les images respectives des droite (BD) et (BC) par s .
b) Déterminer alors s (B) et s (A) et s o s (B) .
c) Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés (B , 1) et (J , 4).
3) On suppose dans cette question que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ un repère orthonormé direct

a) Déterminer l'application complexe associée à s.

b) En déduire l'affixe z_0 de Ω centre de s.

4) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et h =R o s.

a) Préciser h (B) puis caractériser h.

b) Soit Ω' le milieu de $[\Omega B]$.

Montrer que $O\Omega\,\Omega'$ est rectangle et isocèle.

Exercice 11 :(4 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

(E) : $z^2 - z(3m - i)m + 2m^2(1+m^2) = 0$,

où m est un paramètre réel.

I/ Résoudre l'équation (E).

II/ Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère les points M(m(m + i)) et N(2m(m – i)).

1) a/ Montrer que M varie sur une parabole P quand m varie sur IR.

b/ Caractériser la parabole P.

c/ Montrer que par le point I(-1, 0) passe deux tangentes T_1 et T_2 à la parabole P.

d/ Tracer la parabole P ainsi que les tangentes T_1 et T_2.

2) a/ Déterminer l'affixe du point G image du point N par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b/ Déduire que le point G est l'image du point M par une similitude indirecte g que l'on caractérisera.

Exercice 12:

Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(x) = (1-x)e^{2x}$. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1°) Dresser le tableau de variation de f.

2°)a) Montrer que $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion I qu'on précisera.

b)Donner une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point I.

c)Tracer T et $\mathscr{C}$.

3)Calculer l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x= 1.

4°)On pose $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x}dx$; $\forall\, n > 0$, $\forall$n$\in$IN*

a)Mque $\forall$n$\in$IN*, on a : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^2}{1+n}$

En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$

b)M que $\forall$n$\in$IN*, on a : $2I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$.

En déduire.$\lim_{n\to+\infty} nI_n$

5°) Pour tout n$\in$IN*,$u_n = \frac{2^n}{n!} I_n$.

a)M par récurrence que $\forall$n$\in$IN*, on a : $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$.

b)En déduire que $\forall$n$\in$IN*, on a : $u_n \leq \frac{2e^2}{(n+1)}$.

a) Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

6°)a)Mque $\forall$n$\in$IN*, on a : $u_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + u_n$.

b)En déduire que $\forall$n$\in$IN*, on a :

.$u_n = \frac{1}{2}\left[e^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\right]$

c)En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}$

Exercice 13 :

A)Soit la fonction f définie sur]-1, 1[par :

f (x) = $\int_0^x \frac{t^2}{1-t^2}dt$

1)a)Justifier l'existence de f.

b)Prouver qu'il existe trois réels α,β et φ tel que

$\forall$ t $\in$ IR - [-1, 1}, $\frac{t^2}{1-t^2} = \alpha + \frac{\beta}{1-t} + \frac{\varphi}{1+t}$

c)Déduire que $\forall$x$\in$]-1, 1[, $f(x) = -x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

2)Etudier les variations de f et construire sa courbe C dans un repère orthonormé.

3)a)Montrer que $\forall$x$\in$IR*+ et $\forall$k$\in$IN* on a :

$\ln(x) \leq -1 + \frac{x}{k} + \ln k$

b)Déduire que $\forall$k$\in$IN*,$\int_{k-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+k} \ln x\,dx \leq \ln k$.

et que $\forall$n$\in$IN*$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+n} \ln x\,dx \leq \ln(n!)$

c)En déduire que $\forall$n$\in$IN*,

$\ln(n!) \geq (n+\frac{1}{2})\ln(n+\frac{1}{2}) - n + \frac{1}{2}\ln 2$

4)Soit la suite u définie par sur IN* par :

$u_n = n + \ln(n!) - (n+\frac{1}{2})\ln(n)$

a)Montrer que $\forall$n$\in$IN*, $u_n \geq \frac{1}{2}\ln 2$,

b)Vérifier que $\forall$n $\geq$1, on a: $u_n - u_{n+1} = (2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$

c)Déduire que la suite u est convergente.

B)Soit (v_n) la suite définie par :

$V_0 = \int_0^1 \sqrt{(1-x)}\,dx$ et $\forall$n$\in$IN*, $V_n = \int_0^1 x^{n/2}\sqrt{1-x}\,dx$

1)Calculer v_0

2)a)Définir l'ensemble des points M(x,y) tel que $y^2 - x(1-x) = 0$.

b)Déduire que $v_1 = \frac{\pi}{8}$

3)a)Prouver que la suite (v_n) est décroissante .

b)Déduire que la suite v est convergente.

4)a)Prouver par une intégration par partie que

$\forall n \in IN$, $v_{n+2} = \dfrac{n+2}{n+5} v_n$

b)Déduire que $\forall n \in IN$, $\dfrac{n+2}{n+5} \le \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \le 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1$

Exercice 14 :

I/Soit x un réel de]-1, + ∞[, on pose $\varepsilon(x)=\int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt$

1)a) $x \in IR+$, mque, $0 \le \varepsilon(x) \le \frac{x^3}{3}$

b) $x \in]-1, 0]$, mque $\frac{x^3}{3(1+x)} \le \varepsilon \le 0$

c) En déduire que $\lim_{x\to 0} \frac{\varepsilon(x)}{x^2} = 0$

2)a) Démontrer que pour tout x de]-1, +∞[

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x)$

b)Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

3) Soit f la fonction numérique à variable réelle définie sur]-1, +∞[par $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} & si\ x \ne 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

a) Mque f est continue et dérivable sur]-1, +∞[

b) Etudier les variations de la fonction h définie sur]-1, +∞[par $h(x) = x - (x+1)\ln(1+x)$

En déduire le signe de h(x) pour $x \in]-1, +\infty[$

c)Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

II/ Soit $x \in]-1, 0]$ et $n \in IN^*$, on pose $\varepsilon_n = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$

1)Etudier le signe de $\varepsilon_n(x)$ suivant n est pair ou impair.

b)Etudier le signe de $\varepsilon_n(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(x+1)}$, en déduire que $|\varepsilon_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(x+1)}$

2)a) Mque $\forall t \ne -1$

$\dfrac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$

b)En déduire que $\forall x$ de]-1, 0] et pour tout n de IN*

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\varepsilon_n(x)$

3) On considère la suite u définie par:

$u_n = \frac{1}{2}[1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} + \dots + \frac{1}{n2^{n-1}}]$

Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$

Exercice 15 :

ABC est un triangle rectangle en A tel que AC=2AB et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et $D=S_A(B)$.

On désigne par F le projeté orthogonal de A sur BC], I le symétrique de F par rapport à (AB) et J le symétrique de F par rapport à (AC).

1)a)Montrer que les droites (IB) et IA) sont perpendiculaires ainsi que les droites (CJ) et (AJ).

b)Caractériser $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.

et en déduire que A est le milieu de [IJ]

2)Soit S la similitude directe qui transforme B en A et A en C.

a)Déterminer le rapport et l'angle de S.

b)Montrer que F est le centre de S.

c)Montrer que S(I)=J. En déduire CJ=IJ.

3)Soit $\psi = S \circ S_{(AC)}$

a)Préciser la nature et le rapport de ψ.

b)Déterminer $\psi(A)$ et $\psi(D)$.

c) Caractériser ψ.

4)Soit $f = S_{(AG)} \circ \psi$

a)Déterminer f (D)

b)Mque f est une homothétie que l'on précisera.

Exercice 16 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct (O, u, v). Soit $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

1) Résoudre dans C l'équation :$z^2-2z+2=0$

2) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = (1+i)e^{i\alpha}$ et $z_C = (1-i)e^{i\alpha}$.

a) Écrire z_B et z_C sous forme exponentielle.

b) En déduire que le triangle OBC est rectangle isocèle en O.

c) Pour quelle valeur de α le quadrilatère OABC est-il un parallélogramme ?

3) À tout point M(z) on associe le point M'(z') tel que $z'=2+(z-2)^2$

On note C le cercle de centre K(2) et de rayon $\sqrt{2}$.

a) Déterminer z' pour $z = z_A$.

b) Soit M le point de C d'affixe $z = 2+\sqrt{2}\, e^{i\alpha}$

Montrer que l'affixe de M' est $2+\sqrt{2}\, e^{i2\alpha}$

Déterminer et construire , l'ensemble des points M' lorsque α varie dans $[0, \frac{\pi}{2}]$

4) Soit N le point d'affixe $z_N = 2+\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}$

et N' le point associé à N.

a) Écrire $z_N - 2$ sous forme exponentielle; en déduire que N est un point de C .

b) Montrer que : $(\vec{u}, \overrightarrow{KN'}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

c) Placer N sur la figure puis construire le point N'.

Exercice 17 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a)Montrer que f est définie sur [1, + ∞[.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement.

2) a. Montrer que f est dérivable sur]1, +∞[et que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

b)Dresser le tableau de variation de f.

3) a. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b. Tracer la courbe (C).

4) a. Montrer que f est bijective et tracer, dans le même repère, la courbe (C ‘) de sa fonction réciproque f^{-1}.

b)Montrer que pour tout x∈IR₊, $f^{-1}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

5) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.Soit S le solide obtenu par la rotation de la partie de (C') relative à [0, 1] autour de l'axe $(O,\vec{\imath})$. Calculer le volume de S.

6) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives: x = 1 et x = 2.

Exercice 18 :

On considère la suite définie sur IN* par $u_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$.

1) a) Montrer que pour tout n∈IN*, $u_n \geq 0$.

b) Montrer que U est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2) a) En intégrant par parties, calculer u_1.

b) Montrer que pour tout n∈IN*, $u_{n+1} - (n+1)u_n = \frac{-1}{e}$

c) En déduire la valeur de u_2.

3) a) Montrer que pour tout n∈IN* , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{ne}$

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 19 :

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABCD un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On note $J = A * D, K = C * D$ et $F = S_D(C)$.

La perpendiculaire en D à la droite (BD) coupe (OJ) en un point E.

1) Soit S la similitude directe telle que S(A) = J et S(B) = D.

a- Déterminer le rapport et l'angle de S.

b- Déterminer les images des droites (BD) et (AD) par la similitude S. En déduire S(D).

2) On désigne par C et C' les cercles de diamètres respectifs [AJ] et [BD].

a- Soit Ω le centre de S. Montrer que $\Omega \in \zeta \cap \zeta'$ puis construire le point Ω.

b- Montrer que les points Ω , B et E sont alignés.

3) Soit σ la similitude indirecte telle que σ(O) = A et σ(K) = B.

a- Déterminer le rapport de σ.

Montrer que C est le centre de σ.

c- Déduire l'axe de σ.

4- Soit $\varphi = So\sigma$.

a- Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(K)$.

a- Caractériser alors φ.

Exercice 20 :

1) Soit h la fonction définie sur]0,+∞[par : h(x)=aln²(x)+blnx ; a et b deux réels.

Déterminer les réels a et b sachant que h admet un minimum en $e^{\frac{1}{2}}$ égale à $(\frac{-1}{4})$.

2) Soit f la fonction définie sur]0,+∞[par : $.f(x) = \ln^2 x - \ln x$. On désigne par C la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a- Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b- Montrer que tout $x \in]0,+\infty[$;$f'(x) = \frac{-1+2\ln x}{x}$.

c- Dresser le tableau de variation de f.

d- Préciser les points d'intersection de c avec l'axe des abscisses.

e- Tracer la courbe c.

(On précisera les branches infinies).

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]0, e^{\frac{1}{2}}]$.

a- Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g.

b- Montrer que l'équation g(x) = x admet dans I une unique solution α et que α ∈]0,1] .

c- Tracer la courbe c' de g^{-1} dans le même repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

d- Montrer que tout x ∈ J ; $g^{-1}(x) = e^{\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}}$.

4) Soit $A=\int_\alpha^1 f(x)dx$..

a- Interpréter graphiquement A

b- Calculer A.

la droite

c- En déduire la valeur de $K=\int_0^\alpha e^{-\sqrt{x+\frac{1}{4}}}dx$.

Exercice :14

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Soit O le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC, I le milieu du segment [BC], J le milieu du segment [AB] et L le milieu du segment [AC]

1°) Montrer que OBAC est un losange.

2°)a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que f(A) = C et f(B) = A.

a)Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

b)Montrer que. $f = R_{(O,\frac{-\pi}{3})}oS_{AB}$

b)Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de $R_{(O,\frac{\pi}{3})}ot_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$

3°) Soit l'isométrie $\varphi = S_{BC}oS_{AC}oS_{AB}$.
a)Montrer que $S_{AC}oS_{AB} = S_{AO}oS_{AC}$.
En déduire que $\varphi = S_{IK}oS_{IJ}oS_{AC}$ où K est le projeté orthogonal de I sur (AC).
b)Montrer alors que φ est une symétrie glissante dont précisera l'axe et le vecteur.
4°) Soit g une isométrie du plan qui laisse globalement invariant le triangle ABC.
a)Montrer que g fixe le point O.
b)Montrer que g([BC]) = [BC].
c)Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABC.

Exercice 15 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct (O,$\vec{u}$, $\vec{v}$) . Soit A(i) et B(i+1).
On considère l'application
f:P\{A}→P :M(z) →M'(z') tel que z'- i = $\frac{2}{\bar{z}+i}$.
1)Montrer que les points A, M et M' sont alignés.
2)Déterminer l'ensemble ζ des points invariants par f
3)Dans cette question, on suppose que z=1+i+$e^{i\theta}$
a)Déterminer et construire l'ensemble Γ décrit par le point M d'affixe z lorsque θ décrit $]\frac{-\pi}{2},\frac{-\pi}{2}[$
b)Montrer que z'- i=1+i tan $\frac{\theta}{2}$.
c)En déduire l'ensemble Γ' image de Γ par f.
Le construire.

Exercice 16 : (5 points)

Soit F la fonction définie sur [0, +∞[par :
F(x)=$\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt$ si x > 0 et F(0) = -ln2
1°)a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel x > 0,
F(x)= $\frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.
b) Montrer que pour tout réel x > 0,
$e^x ln2 \le \int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt \le e^{2x}ln2$
c) Calculer $\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.
En déduire que F est continue à droite en 0.
2°)a) Montrer que pour tout réel x > 0,F(x)≤ $\frac{-e^x+1}{2x}$
b) En déduire $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$
3°) Montrer que F est dérivable sur]0, +∞[
et pour tout réel x > 0, F'(x) = $\frac{-1}{2}(\frac{e^x-1}{x})^2$
4°) Soit x un réel strictement positif.
a) Montrer qu'il existe un réel c de]0 , x[
tel que F(x) - F(0) = $xF'(c)$
b) En déduire que F est dérivable à droite en 0.
c) Dresser le tableau de variation de F et tracer sa courbe représentative.

Exercice 17 (4 points)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct . On désigne par f l'application u plan dans lui-même
qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'=($\frac{1+i}{2}$) z + 1 - i
1°)a) Montrer que f est une similitude directe centre I que l'on précisera
b) Soit n un entier naturel non nul.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application g_n = fofo...of (n fois)
2°) On définit la suite des points (A_n) par :
A_0 le point d'affixe 2 + i et pour tout entier naturel n,
On désigne par A_{n+1} = f (A_n).
a) Mque pour tout entier n > 0, An = $g_n(A_0)$.
b) En déduire que pour tout entier naturel n,
a_n= $2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^n e^{\frac{i(n+2)\pi}{4}}$
c) Montrer que pour tout entier naturel n, les points I, A_n et A_{n+4} sont alignés.

Exercice 18:

I/ On considère la fonction f définie sur] 0 , +∞ [par f (x) = $\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}$
et on désigne par ζ_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé ($O,\vec{i},\vec{j}$).
1) a) Dresser le tableau de variation de f .
b) Tracer ζ_f .
2) Calculer l'aire de la région du plan limité par la courbe ζ_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = $\frac{1}{e}$; x = 1 .
II/ On pose pour tout n∈ IN* ,
$I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{(\ln x)^n}{x\sqrt{x}}dx$
1) a) Calculer I_1.
b) Mque $\forall\, n > 0;\ |I_n| \le \frac{1}{n!2^n}$
c)Calculer la limite de I_n .
2) En intégrant par partie, montrer que pour tout n de IN* on a $I_{n+1} = I_n + \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{e}}{(n+1)!2^{n+1}}$
3) a) Montrer que pour tout n de IN*,
$I_n = -1 + \sqrt{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!2^k}$
b) En déduire la limite de la somme :
$S_n = 1 - \frac{1}{1!2} + \frac{1}{1!2^2} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!2^n}$

Exercice 19 :(3 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la conique E de foyer O, de sommet S(-1,0) et de directrice associée au foyer O la droite D : $x = \frac{-5}{2}$.

1) a) M que l'excentricité e de E est égale à $\frac{2}{3}$.

b) En déduire que E est une ellipse d'équation : $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

c) Construire l'ellipse E .

2) Soit M un point de E d'affixe $z = re^{i\theta}$ où $\theta \in [0, \pi]$ et $r > 0$.

a) Montrer que $r = \frac{5}{3-2\cos\theta}$.

b) La droite (OM) recoupe l'ellipse E en M'.

Exprimer $(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM'})$ en fonction de θ.

c) En déduire que $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'} = \frac{6}{5}$.

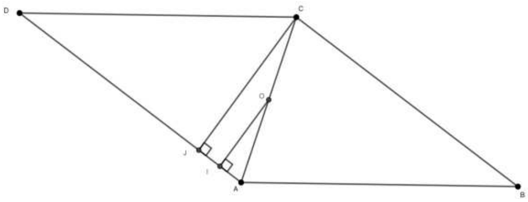
3) a) Montrer que : $MM' = \frac{30}{5+4\sin^2\theta}$.

b) En déduire que MM' est minimale si et seulement si O est le milieu de [MM'].

<u>Exercice 20 : (5 points)</u>

Le plan est orienté. Dans la figure de l'annexe jointe :

*ABCD un losange de centre O tel que



$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{4\pi}{5}\,[2\pi]$

* I et J les projetés orthogonaux respectivement de O et C sur (AD).

1) Soit f la similitude directe qui envoie O sur I et C sur J.

a) Déterminer l'angle et le rapport de f.

(on donne $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$)

b) Montrer que A est le centre de f.

c) Montrer que f(B) = O

2) Soit E = f(D).

a) Montrer que E est le symétrique de O par rapport à I.

b) Déterminer $\frac{OE}{BD}$

3) Soit g la similitude indirecte qui envoie B sur O et D sur E.

a) Déterminer le rapport de g.

b) Montrer que g(O) = I

4) Soit Ω le centre de g.

a) Montrer que Ω appartient à la droite (BI).

b) Montrer que g o g(C) = J et en déduire que Ω appartient à la droite (CJ).

c) Construire Ω et l'axe Δ de g.

d) Δ coupe (BC) en H. construire le point K image de H par g.

<u>Exercice 21 : (6 points)</u>

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé.

1) a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x$

b) En déduire que la courbe C admet deux asymptotes que l'on précisera.

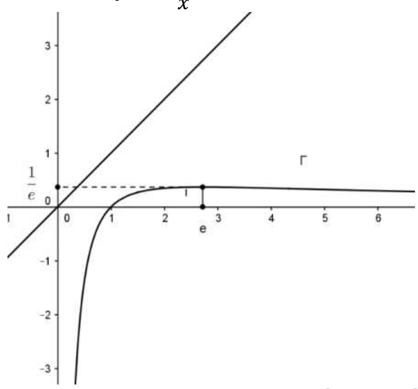
c) Etudier la position de C par rapport à la droite Δ : y = x.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que C admet une unique tangente D parallèle à Δ. Préciser les coordonnées du point de contact B.

b) Donner une équation de D.

4) Dans la figure ci dessous, On a tracé la droite Δ : y = x et la courbe Γ : $y = \frac{\ln x}{x}$



a) Construire le point $A(\frac{1}{e}, 0)$ et vérifier que A appartient à D.

b) Tracer la droite D et placer le point B.

c) Tracer C.

5) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C, la droite Δ et les droites d'équations : $x = \frac{1}{e}$ et x = e

<u>Exercice : 22</u>

Soit f la fonction définie sur $]-\ln 2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{2e^x - 1}}$ **et** g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par g(x) = - ln (1+ sin x)

1) a)Dresser le tableau de variations de g

b)Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $]-\ln 2, +\infty[$

c)Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-\ln 2, +\infty[$ et que $(g^{-1})'(x)$ = f(x)

2). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, on pose $F_n(x) = \int_0^x (f(t))^{2n}\,dt$

a)Donner le sens de variations de F_n

b)Calculer $F_1(x)$ et montrer que $\lim_{x\to+\infty} F_1(x) = \ln 2$

c)Mque pour tout réel t ≥ 0 ; $-e^{\frac{-t}{2}} \leq f(t) \leq 0$

d)En déduire que $F_n(x) \leq \frac{1}{n}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$ est finie.

3. On pose $U_n = \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$.

On se propose dans la suite de déterminer U_n.

a)Mque $F_{n+1}(x) + F_n(x) = -\frac{1}{n}\ [(f(x))^{2n} - 1]$

b) En déduire que $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n}$

5. On pose $W_n = (-1)^n U_n$; $n \in IN^*$.

Vérifier que : $W_{n+1} - W_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

En déduire que pour n ≥ 2 ;

$u_n = (-1)^n\left[-ln2 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right]$.

Exercice 22 :(7 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit (E) la conique d'équation : $4x^2 + 3y^2 - 4y - 4 = 0$

1°)a) Montrer que(E) est une ellipse dont on déterminera l'excentricité, les sommets, un foyer et la directrice associée.

b) Tracer (E).

2°) Soit M un point de (E) d'affixe z = x + iy, x et y des réels.

a) Montrer que $|z| = \frac{1}{2}(y+2)$

b) En déduire que $|z| = \frac{2}{2-\sin(\theta)}$ où θ est un argument de z.

c)La perpendiculaire à (OM) passant par O coupe (E) en un point N tel que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Déterminer θ∈[0 ,2π] pour que l'aire du triangle OMN soit maximale.

Exercice 23: (4 points)

R = $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan

1) Soit E l'ensemble des points M(x, y) vérifiant $4x^2 + y^2 - 8x = 0$

a) Montrer que (E) est une ellipse dont on donnera le centre, l'excentricité, les sommets et les foyers.

b) Vérifier que les foyers appartiennent au cercle(C) de centre O et de rayon 2.

Tracer (E) et construire ces foyers.

c) Monter qu'il existe deux tangentes à (E) issues du point A(–2 , 0).

2) Soit M(a, b) un point variable du cercle (C) de centre O et de rayon 2 et H le projeté orthogonal de M sur la droite D : x = 2.

a) Déterminer, en fonction de a et b, les coordonnées du point I milieu de [MH].

b) Montrer que lorsque M varie sur le cercle (C), I varie sur une ellipse.

Exercice 24: (5 points)

Soit f la fonction définie sur [0, +∞[par $f(t) = t\,e^{-t}$

1) a) Dresser le tableau de variations de f.

En déduire que f est bornée.

b) Montrer alors que pour tout réel t ≥ 0 , on a: $f(t)e^{\frac{t}{2}} \leq 1$.

2) Pour tout entier n ≥ 1, on note F_n la fonction définie sur [0, +∞[par

$F_n(x) = \int_0^x [f(t)]^n\,dt$.

a) Prouver que $[f(t)]^n \leq e^{-\frac{t}{2}}$. On pourra utiliser la question 1).

b) En déduire que, pour tout x ≥ 0, $F_n(x) \leq 2$.

c) Prouver alors que $F_n(x)$ admet une limite finie quand x tend vers +∞.

3) Pour tout entier n ≥ 1, on définie la fonction G_n sur [0, +∞[par $G_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}\,dt$.

a) Expliciter $G_1(x)$.

b) Montrer que $G_{n+1}(x) = (n+1)\,G_n(x) - x^{n+1}e^{-x}$.

c) En déduire, en raisonnant par récurrence, que $\lim\limits_{x\to+\infty} G_n(x) = n\,!$.

4) a) Montrer que $(G_n)'(nx) = n^n\,[f(x)]^n$.

b) Prouver alors que $F_n(x) = \frac{1}{n^{n+1}}\,G_n(nx)$.

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$.

Exercice 25 :(3 points)

Soit m un paramètre complexe et (E_m) l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - (m + i\bar{m})z + (m+1)(i\bar{m} - 1) = 0.$$

1) a) Vérifier que $z' = 1 + m$ est une solution de (E_m).

b) En déduire l'autre solution z'' de (E_m)

Dans la suite le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\ \vec{v})$, on note les points A, M, M' et M'', d'affixes respectives :1, m, z' et z''.

2) Montrer que M'' est l'image de M' par un antidéplacement que l'on caractérisera.

3) Soit (H) l'ensemble des points M tels que les points A, M' et M'' soient alignés.

a) Montrer que (H) est une hyperbole.

b) Montrer que O est un point de (H), et donner une équation de la tangente à (H) en O.

c) Donner les éléments caractéristiques de (H).