(2020/2021)

Exercice n°1

1°) Montrer que pour tout entier naturel n, $(2n+1)^2-1$ est divisible par 8.

2°) Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a,b) tels que $(a-3)^2=b^2+15$.

3°) Montrer que pour tout entier naturel n, 5^{n+12} et 5^n ont même reste dans la division euclidienne par 13.

4°) Determiner tous les nombres premiers p telsque p divise 5^p+1

5°) Déterminer tous les entiers naturels x telsque $x^{19}+3x\equiv 2 \pmod 7$

Exercice n°2

1°) soit a et n deux entiers naturels. Demontrer que $a^{2n+1}+1\equiv 0 \pmod{a+1}$

En déduire que $\left(2^{2^p}\right)^{2n+1}+1\equiv 0 \pmod{\left(2^{2^p}+1\right)}$ avec $p\in\mathbb{N}$.

2°) Prouver que $2^{2^n}+1$ est un nombre premier quand $n\in\{0,1,2,3\}$

3°) a) Verifier que $2^{32}\equiv 640 \pmod{641}$

b) Repondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

$\forall n\in\mathbb{N}$, $2^{2^n}+1$ est un nombre premier.

Exercice n°3

1°) Soit $N\in\mathbb{N}$. Demontrer que le chiffre des unités de N est le reste de N modulo 10.

2°) $n\in\mathbb{N}$.

a) Determiner suivant n, le chiffre des unités de 3^n.

b) En déduire le chiffre des unités de l'entier $A=2023^{2021}-373^{2531}$

c) Déterminer suivant n, le chiffre des unités de 9^n.

3°) Mq pour tout entier naturel non nul n, 6 est le chiffre des unités de l'entier 6^n.

4°) Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'entier:

$B=3^n+6^n+9^n$

a) Déterminer ...

b) En déduire le chiffre des unités de l'entier :

$$S = 2003^{2010} + 2006^{2010} + 2009^{2010}$$

Exercice n°4

1°) Determiner le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16

2°) En déduire que $2009^{8001} = 16k + 2009$ tq $k \in \mathbb{N}$.

3°) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 2009^2 - 1 \\ U_{n+1} = (U_n + 1)^5 - 1 \; , \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Mq U_0 est divisible par 5.

b) Mq $U_{n+1} = U_n\left(U_n^4 + 5\left(U_n^3 + 2U_n^2 + 2U_n + 1\right)\right)$.

c) Demontrer par reccurence que $\forall n \in \mathbb{N}$, U_n est divisible par 5^{n+1} puis déduire que.

4°) a) verifier que $U_3 = 2009^{250} - 1$ est divisible par 625.

$2009^{250} - 1$ est divisible par 625.

b) Demontrer alors que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 625.

5°) Mq $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10000.

Exercice n°5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

① a - Verifier que a_n est pair $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b - Déterminer les valeurs de n tq $a_n \equiv 0 \pmod 3$.

② Soit p premier tel que $p > 3$

a) Mq $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, $3^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ et $6^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

b) Mq p divise a_{p-2}.

③ Soit $x \in \mathbb{Z}$

a) Determiner les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 4

b) En raisonnant modulo 4, montrer que $x^2 + 3y^2 = 942$ n'admet aucun couple (x, y) d'entiers relatifs solution.

Exercice n°6

Réponde par vrai ou faux en justifiant la réponse :

1°) Pour tout entier naturel n, $\frac{1}{3}(5\times4^n-2)$ est un entier.

2°) Pour tout entier naturel n, $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est un multiple de 17

3°) $2019^{2019}+2020^{2020}+2021^{2021}\equiv 0 \pmod 5$

4°) pour tout entier n, $n^2-2n+1\equiv 9 \pmod{10}$ ssi $n\equiv 4 \pmod{10}$.

5°) pour tout entier n, $x(2x+1)\equiv 3 \pmod 5$ ssi $n\equiv 1 \pmod 5$

6°) Pour tout entier relatif n, $3n^2+3n+1$ n'est pas divisible par 5.

7°) L'ensemble des restes possibles modulo 9 de n^6-1 est $\{0,8\}$.

8°) Pour tout entier naturel n, 5^n+2^n est divisible par 7

9°) Pour tout entier naturel n, $S=5\times n^{26}+9\times n^{13}+8n^2+4n$. est divisible par 13

10°) Pour tout entier naturel non nul n on a : $7^n\equiv 2^n+5^n \pmod{10}$.

11°) si a et b deux entiers non divisible par 3.
alors a^6-b^6 est divisible par 3.

12°) n, a et b sont des entiers

a) $n^2\equiv n \pmod 5$ ssi $n\equiv 0 \pmod 5$ ou $n\equiv 1 \pmod 5$.

b) $4(n-1)\equiv 0 \pmod 6$ alors $n\equiv 1 \pmod 6$

c) si $ab\equiv 1 \pmod 4$ alors $a\equiv 1 \pmod 4$ et $b\equiv 1 \pmod 4$