Lycee pilote sfax_ 4math M^r megdich

Serie de revision N°3

EXERCICE N°1

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante : $z^3-2(\sqrt{3}+i)z^2+4(1+i\sqrt{3})z-8i=0$

1)a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on précisera

b) Résoudre l'équation (E) ; Donner la forme exponentielle de chacune des solutions

2) soit θ un réel et E_θ l'équation : $z^3-2e^{i\theta}(\sqrt{3}+i)z^2+4e^{2i\theta}(1+i\sqrt{3})z-8ie^{3i\theta}=0$

a)Montrer que ; $\left(ze^{-i\theta}\right)$ est solution de (E) si et seulement si z est solution de E_θ

b) En déduire les solutions de E_π suivante : $z^3+2(\sqrt{3}+i)z^2+4(1+i\sqrt{3})z+8i=0$

3) Représenter dans le plan complexe les images des solutions de (E) et E_π et vérifier qu'elles sont les sommets d'un polygone régulier

EXERCICE N°2

1) on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(1+i)z-i=0$

Résoudre (E) (z_1 et z_2 sont les solutions de (E))

2) $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ est un repère orthonormée direct du plan complexe on désigne par A,B, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives 1,i , z_1 et z_2

Soit z un nombre complexe distinct de 1,i z_1 et z_2 On note M(z) et M'(z') tel que $z'=\frac{z+i}{z-i}$

Dans la suite de l'exercice on prend z=$i+2e^{i\theta}$ avec θ est un réel

3)a)Déterminer Γ l'ensemble des points M

b) Montrer que AM'=1 et que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM'}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}-\theta\left[2\pi\right]$ déduire l'ensemble des points M'

4) soit P le milieu de $\left[MM'\right]$ et z_P son affixe et Q le point d'affixe $z_Q=e^{i\frac{\pi}{4}}z_P$

Montrer que $z_Q=\frac{1}{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

EXERCICE N°3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\ln(1+x^2)$ on désigne par Γ sa courbe

1)a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

b) Préciser la tangente à Γ au point d'abscisse 0. Tracer Γ c) Tracer Γ' la courbe de f^{-1}

2) a) Vérifier que pour tout réel x : $\frac{x^3}{1+x^2}=x-\frac{x}{1+x^2}$ et déduire $I=\int_0^1\frac{x^3}{1+x^2}dx$

b) Déterminer alors l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Γ et les droites d'équations x=0, x=1 et y=0

3) Pour $n \in \mathbb{N}$; $u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2p+4}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$; $s_n(x) = x^3 - x^5 + x^7 + ... + (-1)^n x^{2n+3}$

a)Montrer que $s_n(x) = \frac{x^3}{1+x^2} + \frac{(-1)^n x^{2n+5}}{1+x^2}$

b)En déduire que $u_n = I + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+5}}{1+x^2} dx$ calculer alors $\lim_{n \to +\infty} u_n$