Exercice n°1

on dispose de n boules numérotées de 1 à n $(n \geq 2)$. On place au hasard toutes les boules dans les boîtes (chaque boîte peut contenir de 0 à n boules).

1°) Calculer la probabilité q_n d'avoir la boîte numerotée 1 vide

Calculer $\lim_{n \to +\infty} q_n$.

2°) a) Calculer la probabilité P_n pour qu'aucune boîte ne soit vide

b) Soit $x \in]1, +\infty[$, montrer que $\forall n \geq 2$, $x^n \geq (1-n) + nx$.

c) En déduire que $\forall n \geq 2$, $\frac{P_n}{P_{n+1}} \geq 2$.

d) Etablir que : $\forall n \geq 2$, $P_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Calculer $\lim_{n \to +\infty} P_n$

Exercice n°2

1°) Soit (E) l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $11x^2 - 7y^2 = 5$ ou x et y sont des entiers.

a) Mq si $M(x,y)$ appartient à (E) alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod 5$

b) Mq si $M(x,y)$ appartient à (E) alors x et y sont des multiples de 5

2°) a) Mq si x et y sont des multiples de 5 alors $M(x,y)$ n'appartient pas à (E).

b) Déterminer l'ensemble E

Exercice n°3

ABC un triangle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $BC = 2AB$.

On considère les points I, J et K tels que $I \in [CA)$ et $CI = CB$

J la symétrique de B par rapport à A, K le milieu de [IC]

1°) a) Mq il existe un unique déplacement f tel que $f(C) = J$ et $f(I) = B$

b) Mq f est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$

c) Soit Ω le centre de f

Montrer que Ω est le centre du cercle inscrit dans le triangle

...

2°) Montrer que $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega E}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ puis déduire que les points Ω, I et J sont alignés

Soient Δ la médiatrice de [IC] et Δ' la médiatrice de [BJ] et $g = f \circ S_\Delta$

3°) a) Déterminer $g(C)$ et $g(I)$ puis déduire $g(\Delta)$ et $g(K)$

b) Montrer que g est une symétrie glissante.

4°) Montrer que $S_{\Delta'} \circ g = g \circ S_\Delta$ puis déduire que $g = t_{2\overrightarrow{HA}} \circ S_{(\Omega A)}$

où H est le projeté orthogonal de Ω sur (AB).

5°) On note H_1 le milieu de [AK] et H_2 le symétrique de H par rapport à A

a) Montrer que $S_{(\Omega A)}(H_1) = H$

b) Caractériser alors g.

Exercice n°4

A) Soit $m \in \mathbb{C}^*$ l'équation (E_m): $2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$

on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).

1°) Montrer que le discriminant de l'éq (E_m) est $\Delta = (2im)^2$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).

B) Dans cette partie, on suppose que $m \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, i\}$.

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectives : 1, i

m, $z_1 = \frac{(1-i)(m+i)}{2}$ et $z_2 = \frac{(1+i)(m+1)}{2}$, soit I milieu de [AB].

Soit f l'application du plan P dans lui-même qui à tout point N (z) associe le point N' (z') tq $z' = iz + 1$.

1°) a) Montrer que f est une isométrie.

b) Montrer que I est le seul point invariant par f.

c) Mq f est une rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

d) Vérifier que $f(M_1) = M_2$.

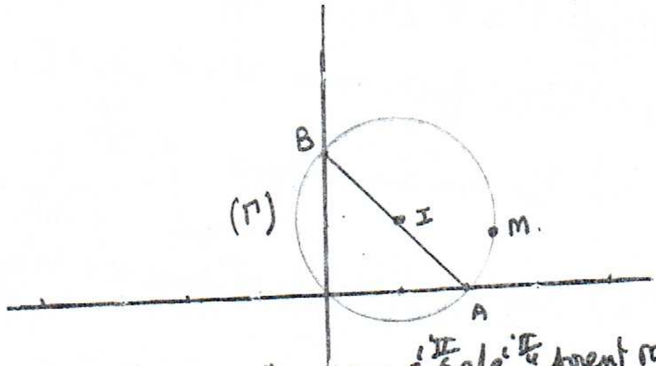
2°) a) Vérifier que $\frac{z_1 - m}{z_2 - m} = i\left(\frac{m-1}{m-i}\right)$

b) En déduire que M est situé sur le cercle Γ de diamètre [AB] alors les points M, M_1 et M_2 sont alignés

3°) a) Vérifier que $z_2 - z_1 = im$ et déduire que $M_1M_2 = OM$. ainsi que la position relative des droites (M_1M_2) et (OM).

b) Montrer que $\overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{IM_2} = \overrightarrow{OM}$.

c) on a tracé dans la page annexe le cercle (Γ) de diamètre $[AB]$ et on a placé sur (Γ) le point M. Construire en justifiant les points M_1 et M_2



Exercice n°5 : 1°) Déterminer l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}^*$ pour que $e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $e^{i\frac{\pi}{4}}$ soient racines $n^{ième}$ d'un nombre complexe (le m Zo)

2°) a) Dans le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, placer les points $A(a = 2e^{i\frac{\pi}{6}})$ et $B(b = 2e^{i\frac{\pi}{4}})$

b) La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B se coupent en C. Déterminer c l'affixe de C.

c) Construire alors le point D d'affixe c^2

3°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 - 2z - i\sqrt{6} = 0$

on note z_1 la solution dont les parties réelle et imaginaire sont positives.

Soit les points $I(1)$, $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$.

b) Justifier que M_1 est le milieu de $[IC]$.

c) Calculer $\dfrac{z_2 - z_1}{c}$. Construire alors les points M_1 et M_2

Exercice n°6 : Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par $f(x) = \sqrt{1 - e^x}$ et on désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm).

1°) a) Étudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

b°) Etudier les variations de f sur $]-\infty, 0]$

2°) a) Mq f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $[0, 1[$

b) Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3°) Mq $\forall x \in [0, 1[$ $\quad f^{-1}(x) = \ln(1-x^2)$

4°) a) Vérifier que $\forall x \in [0, 1[$, $\dfrac{x^2}{1-x^2} = -1 + \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x}{1-x^2}$

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{1-x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln(1+\sqrt{2})$

5°) a) Mq à l'aide d'une intégration par partie que :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \ln(1-x^2)\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2 - \sqrt{2} + 2\ln(1+\sqrt{2})$$

b) Soit $\mathcal{A}$: l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ et les droites d'équations respectives : $y = -\ln 2$, $x = 0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Mq $\mathcal{A} = (8\ln(1+\sqrt{2}) - 4\sqrt{2})\,cm^2$.

c) Déduire alors $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0} \sqrt{1-e^x}\,dx$.

2018 / 2013 / 2019/