Mme Triki Ikhlas — Serie de Revision n°...

Exercice n°1

Reponde par Vrai ou faux en justifiant :

1°) L'équation (E) : $6x^2 - 5y^2 = 7$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$

2°) Le quotient dans la division euclidienne de -2011 par 97 est (-23)

3°) $\sum_{k=1}^{2012} k! \equiv 3 \pmod{10}$

4°) si deux entiers n et p sont tels que : $\begin{cases} np \equiv 6 \pmod{10} \\ p \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$

alors : a) $n \equiv 1 \pmod 5$

5°) si n un entier, si $n^2 \equiv 1 \pmod 9$ alors $n \equiv 1 \pmod 3$.

6°) si p premier distinct de 2 alors $p^2 \equiv 1 \pmod 4$.

Exercice n°2 :

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A de sens direct.
soit I le milieu de [BC], la parallèle à (AI) passant par C coupe (AB) en D.

1°) a) Caractériser l'isométrie $f = S_{(AB)} \circ S_{(AI)}$

b) Déterminer la droite Δ tel que $S_\Delta \circ S_{(CD)} = t_{\overrightarrow{CB}}$

Caractériser alors $f \circ t_{\overrightarrow{CB}}$.

2°) a) Montrer que $t_{\overrightarrow{IC}} \circ S_{(AI)}$ est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.

b) Soit J milieu de [CD]. Vérifier que $f = S_{(AC)} \circ S_{(AJ)}$

En déduire alors que l'isométrie $\varphi = S_{(IJ)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AJ)}$ est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.

3°) Les bissectrices intérieurs du triangle ABC se coupent en K.

soit $r = S_{(AC)} \circ S_{(AK)}$

a) Mq r est une rotation dont on precisera le centre et l'angle

b) En utilisant une décomposition convenable de la rotation $r' = r_{(C, \frac{\pi}{4})}$, caractériser l'isométrie $r' \circ r$.

c) Soit $A' = r'(A)$. Montrer que les droites (AB) et $(A'K)$ sont

4°) Soit h une isométrie qui laisse le triangle ABC globalement invariant. Montrer que h fixe A et I. En déduire toutes les isométries h.

Exercice n°3 :

Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité :

i	0	1	2
P_i	0,1	0,5	0,4

a) Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X

b) Calculer $E(X)$

2°) Dans cette station service, la probabilité qu'un client achète du gazole est 0,3 achète de l'essence est 0,7, celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients.

on considère les évènements suivants :

C_1 : « En cinq minutes, un seul client se présente »

C_2 « En cinq minutes, deux clients se présentent »

E : « En cinq minute, un seul client achète de l'essence »

a) Calculer $p(C_1 \cap E)$

b) Mq $p(E/C_2) = 0,42$ et Calculer $p(C_2 \cap E)$.

c) En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

3°) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes, déterminer la loi de probabilité de Y.

Exercice n°4 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

1°) a) Mq l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique a et que $\frac{1}{2} < a < 1$

b) Vérifier que $a = \ln\left(\frac{a}{1-a}\right)$.

2°) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \int_0^a \frac{e^{nx}}{(1+e^x)^n} dx$.

a) Mq $u_1 = -\ln(2-2a)$

b) vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = f(x) - f^2(x)$.

b) vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n} - a^n\right)$

c) En déduire que

3°) a) Mq pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\frac{a}{2^n} \leq U_n \leq a^{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

b) Mq pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a : $u_n = -\ln(2-2a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} - a^k\right)$

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} - a^k\right)$.

Exercice n°5

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en B tel que $(\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

on désigne par O le milieu de [AC], I le milieu de [OA] et J le milieu de [AB]

1°) Montrer qu'il existe un unique déplacement R telque $R(A) = O$ et $R(B) = C$.

2°) a) Mq R est une rotation dont-on déterminera son angle.

Construire son centre D

b) Mq le quadrilatère ABOD est un losange.

3°) on pose $f = R \circ t_{\overrightarrow{BA}}$.

a) Déterminer $f(B)$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

4°) Soient M, M' et M'' les points du plan telque $R(M') = M$ et $f(M) = M''$

a) Montrer que si $M \neq A$ et $M \neq D$ alors $(\overrightarrow{MM'}, \widehat{\overrightarrow{MM''}}) \equiv -\frac{2\pi}{3} + (\overrightarrow{MD}, \widehat{\overrightarrow{MA}}) [$

b°) on suppose que $MM'M''$ est un triangle rectangle en M de sens direct. Montrer que M varie sur un cercle à préciser.

5°) Soit φ l'antidéplacement qui transforme B en A et A en O

a) Mq φ est une symétrie glissante puis déterminer ses éléments caractéristiques.

b) Mq $\varphi(O) = D$

c) Soit $E = \varphi(D)$. Montrer que E et B sont symétriques par rapport à O.

Exercice n°6 :

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$

soit $a \in \mathbb{C}^*$. on considère l'application $f : P \setminus \{I\} \to P$ qui a tout point $M(z)$ associé le point $M'(z')$ tq $z' = \dfrac{z-1-a^2}{z-1}$

1°) a) Mq les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation : (E) : $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2°) on considère les points A et B d'affixes respectives $1+ia$ et $1-ia$ et on pose $a = x+iy$ où $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

a) Mq les points O, A et B sont alignés ssi $x = 0$.

b) Mq les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ sont orthogonaux ssi $|a| = 1$

3°) on suppose que $a = e^{i\theta}$ tq $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

a) Donner l'écriture exponentielle des nombres $1+ia$ et $1-ia$

b) En déduire a pour que les points O, A et B forment un triangle isocèle rectangle en O.

4°) on prend $a = i\sqrt{2}$. Montrer que la demi-droite $[IO)$ est la bissectrice de l'angle $(\vec{IM}, \vec{IM'})$