Lycée Mahmoud Magdich	série de révision 1 4M	Mme Chaabouni

Exercice N°1

Le plan des nombres complexes est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

On considère les nombres complexes $a=\sqrt{3}+i$; $b=1-i\sqrt{3}$

1) Mettre a et b sous la forme exponentielle

2) a) placer les points A , B et c d'affixes respectives a , $\bar{b}$, c = $a+\bar{b}$

b) Vérifier que $c=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$

3) On considère dans $\mathbb{C}$ (E) : $z^2+2z-2c=0$

Vérifier que a est une solution de (E)

On désigne par d la deuxième solution de (E) , montrer que $d=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)e^{-i\frac{11\pi}{12}}$. Construire D

Exercice N°2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

On donne les points $A(a)$, $B(b)$, $M(z)$, $M'(z')$ tels que $a=1+i$; $b=1-i$ et $z'=2-\dfrac{2}{z}$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z'=z$. Donner les solutions sous forme exponentielle
2) Montrer que $a^{8n}+b^{8n}=2^{4n+1}$ pour tout $n \in IN$
3) On pose $z=e^{i\alpha}$ où $\alpha\in\left]0,\pi\right]$

a) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque $\alpha\in\left]0,\pi\right]$

b) Ecrire z' sous forme exponentielle

c) Déterminer les valeurs de α pour que O , A et M' soient alignés

4) Vérifier $\dfrac{z'-b}{z'-a}=i\dfrac{z-b}{z-a}$.

   a) Déterminer l'ensemble des points M' quand M varie sur le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A

5) On considère l'équation (E) $z'^3=8i$

a) Vérifier que (E) est équivalente à l'équation $(z-1)^3=iz^3$

b) Soit z_0 une solution de (E) . Montrer que $|z_0-1|=|z_0|$. En déduire $1-z_0-\bar{z}_0=0$

c) On pose $z_0=re^{i\theta}$ avec $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. Montrer que $r=\dfrac{1}{2\cos\theta}$. En déduire les valeurs possibles de θ

Exercice N° 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$Soit l'équation (E) : $z^2-4z=2\bar{z}-8$

1) Vérifier que $\alpha=1+i\sqrt{3}$ est une solution de (E)

2) On note par A , B et C les points d'affixes $A(2)$ $B(\alpha)$ $C(\bar{\alpha})$

a) Vérifier que A , B et C appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon

b) On note par f le déplacement qui envoie C sur A et A sur B . Montrer que f est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

3) Soit D le point du cercle $\mathscr{C}$ d'argument θ avec $\theta\in\left]-\pi,\pi\right]$

a) Construire E l'image de D par f

b) Justifier de l'affixe de E ...

4) Soient F et G les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[CE]$

a) Justifier que $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$ et $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2}$

b) Montrer que $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$. En déduire que le triangle AFG est équilatéral

Exercice N° 4

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ Soit f l'application qui à tout point $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que z' $= \frac{z^2-1}{2z-2\cos\theta}$ *ou* θ un réel fixe de l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $z \neq \cos\theta$

1/ Déterminer l'ensemble des points invariants par f

2/ a) Montrer que $2\cos\theta\, e^{i\theta} - 1 = e^{i2\theta}$

b) En déduire que pour tout $z \neq \cos\theta$ *et* $z \neq e^{-i\theta}$, $\frac{z'-e^{i\theta}}{z'-e^{-i\theta}} = \left(\frac{z-e^{i\theta}}{z-e^{-i\theta}}\right)^2$

3/ On désigne par A et B les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ et G milieu du segment $[AB]$

a)Montrer que pour point M de P \ {A,B } on a : $(\widehat{\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})(2\pi)$ et que $\frac{M'B}{M'A} = \left(\frac{MB}{MA}\right)^2$

b) Montrer que si M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ alors M'appartient au segment $[AB]$

Exercice N° 5

Pour tout $\theta \in [0,\pi]$ On pose Z= cos $\theta\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ et le point M d'affixe Z

1/ Déterminer suivant les valeur s θ la forme exponentielle de Z

b) Déterminer l' ensembles des points M lorsque θ var*iedans* $[0,\pi]$

2/ a)Résoudre dans C l'équation (E) : $z^2 - 2\cos\theta e^{i\frac{\pi}{4}} z + i = 0$, $\theta \in [0,\pi]$

b) Déterminer θ pour que(E) admettre une racine double le plan rapporté à un repère orthonormé direct .Les points M'et M''d'affixes respectives $z' = e^{i(\frac{\pi}{4}-\theta)}$; $z'' = e^{i(\frac{\pi}{4}+\theta)}$

3/ a)Montrer q ue M est le milieu de [$M'M''$]

b) Montrer que $\frac{z''-z'}{Z} = 2i\,tg\,\theta$ ou $\theta \neq \frac{\pi}{2}$

c) En déduire que $\overrightarrow{M'M''}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux d) Construire les points M' et M'' connaissant M

Exercice N° 6

I) Résoudre (E).: $z^2 - a(a+i)z + ia^3 = 0$ où a $\in \mathbb{C}^*$.

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

on considère les points A,M ,M_1 , M_2 d'affixes respectives -1, a , ia et a^2.

1)a) Montrer que A, M_1 et M_2 sont alignés si et seulement si a est imaginaire pur.

b) Soit a un nombre complexe **non imaginaire pur.**

Montrer que le triangle AM_1M_2 est équilatéral si et seulement si $|a| = |a+i| = 1$.

1) Le triangle AM_1M_2 est équilatéral.
   a) Vérifier que M $\in$ $C(O,1)$.
   b) Soit le point N d'affixe a+i .Montrer que le quadrilatère OJNM est un losange.

On pose arg(a)$\equiv \theta[2\pi]$ avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ Déterminer la forme exponentielle de a+i et a+1.

   c) En déduire que $(\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MA}}) \equiv \pi/2 + \theta/2\,[2\pi]$.
   d) Représenter alors les poi … $) \equiv -\pi/6\,[2\pi]$.