Dme Triki Ikhlas

Exercice n°1 :

1°) Résoudre dans $\mathbb{Z}$; $6x \equiv 0 \pmod 8$

2°) En déduire tout les entiers x tel que :

a) $3x \equiv 2 \pmod 4$

b) $3x \equiv 2 \pmod 8$

3°) Resoudre dans $\mathbb{Z}$:

a) $x^2 \equiv 1 \pmod 5$

b) $x^2 \equiv 4 \pmod 5$

4) Déterminer tous les couples d'entiers (x,y) telsque $x^2y \equiv 1 \pmod 5$

Exercice n°2 :

soit a et b deux entiers

1°) Mq $(a+b)^7 \equiv a^7 + b^7 \pmod 7$

2°) En déduire que $(a+b) \equiv 0 \pmod 7$ si et seulement si $a^7 + b^7 \equiv 0 \pmod 7$

3°) Déterminer le reste modulo 7 de $444333^7 + 333444^7$

4°) Déterminer tous les entiers naturels n telsque $n^7 + 128 \equiv 0 \pmod 7$

Exercice n°3 :

on designe par p un entier premier superieur ou égal à 7

1°) Mq $n = p^4 - 1$ est divisible par 3

2°) a) En remarquant que p impair, prouver qu'il existe un entier naturel k telque $p^2 - 1 = 4k(k+1)$

b) Déduire que $n \equiv 0 \pmod{16}$.

3°) Montrer que $n \equiv 0 \pmod 5$ et Déduire que 240 divise n.

4°) Existe-il quinze nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_{15}$ superieurs ou égaux à 7 telsque $A = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4$ soit un nombre premier ?

Exercice n°4 :

1°) Déterminer tous les entiers naturels a telsque $a^3 \equiv 1 \pmod 7$

2°) Déterminer tous les entiers naturels a telsque

$$a + a^2 + a^3 \equiv 1 \pmod 7$$

3°) Déterminer tous les entiers naturels a telsque $a^6 \equiv 1 \pmod 7$

4°) Determiner le reste modulo 7 de $(7005)^6 - (7005 + 7005^2 + 7005^3)$

Exercice n°1

pour tout entier naturel n, on prend $a_n = 2^{2^{n+2}} + 1$.

1°) a) vérifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 1 + (a_n - 1)^2$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n \equiv 7 \pmod{10}$.

2°) a) Vérifier que $36^6 \equiv 36 \pmod{100}$.

b) En déduire que $36^{16} \equiv 36 \pmod{100}$.

3°) a) vérifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+4} = (a_n - 1)^{16} + 1$.

b) Monter par reccurence que pour tout entier naturel n

$a_{4n+2} \equiv 37 \pmod{100}$.

c) Déterminer les deux derniers chiffres du nombre $N = 2^{2^8} + 2^{2^9}$.

Exercice n°2 :

1°) Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $2x^3 - x + 15 \equiv 0 \pmod 7$

2°) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{n+6} - 2^n$ est divisible par 7.

3°) a) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7.

b) Déterminer le reste modulo 7 de 2020^{2017}.

4°) a) Discuter suivant les valeurs de l'entier naturel k, le reste de 2^k modulo 7

b) Déterminer le reste de 247^{349} modulo 7.

5°) Soit S la somme des diviseurs ~~positifs~~ positifs de 2^{99}. Quel est le reste modulo 7 de S.

6°) Soit $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$ où $n \in \mathbb{N}$

Déterminer les entiers naturels n tels que $A_n \equiv 0 \pmod 7$

7°) Soient a et b deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$. On considère le nombre $N = a\,10^3 + b$

(N s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$).

a) vérifier que $10^3 \equiv 6 \pmod 7$

b) En déduire tous les nombres entiers N qui sont divisibles par 7.

1) Determiner suivant les valeurs de l'entier naturel n les restes modulo 7 de 2^n et 3^n.

2°) En déduire le reste modulo 7 de $A = 2005^{2004} - 1426^{1426}$

3°) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = (2^0 - 4) + (2^1 - 4) + \dots + (2^{3n} - 4)$

Determiner les entiers naturels n pour lesquels 7 divise S_n.

4°) Determiner les entiers naturels m verifiant :

$$2018^m - 2019^m \equiv 2 \pmod 7.$$

5°) Déterminer les couples d'entiers naturels (x, y) verifiant : $2^x + 2^y \equiv 2 \pmod 7$

Exercice n°4:

1°) Determiner l'ensemble des entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ tel que

$(n+1)^{17} \equiv 2 \pmod{17}$

2°) Résoudre le système $\begin{cases} (n+1)^{17} \equiv 2 \pmod{17} \\ (n+3)^{13} \equiv 5 \pmod{13} \end{cases}$