Lycée pilote de Bizerte **Serie d'exercices n°9** Prof M.Ben Ali

4eme Math

Exercice n°1

Soit l'application f du plan dans lui même qui à tout pont M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = i\bar{z} - 2i + 3$.

1) Montrer que f est une isométrie et qu'elle n'admet aucun point invariant .
2) Montrer que $f \circ f$ est une translation dont on précisera le vecteur $\vec{u}$.
3) Soit $g = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}} \circ f$.
   a) Soit A et B les points d'affixes respectives $(2 - \frac{1}{2}i)$ et $\frac{5}{2}$. Déterminer g (A) et g (B) .
   b) En déduire la nature de g .
   c) Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice n°2

Dans un plan orienté P , on considère un triangle équilatéral direct ABC.
On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$,
et par O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Soit Δ la perpendiculaire à (AB) en B. On désigne par R_1 la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par R_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1)Déterminer la droite D telle que : $R_1 = S_D \circ S_{(OC)}$.

2)Déterminer la droite D ' telle que : $R_2 = S_{(OC)} \circ S_{D'}$.

3)En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $R_1 \circ R_2$.

4)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des applications :
$R_3 = S_\Delta \circ S_{(BC)}$ et $R_3 \circ R_1$.

5)On pose $f = R_1^{-1} \circ R_3 \circ R_1$.

a)Montrer que f est la rotation de centre A et d'angle $(-\frac{\pi}{3})$.

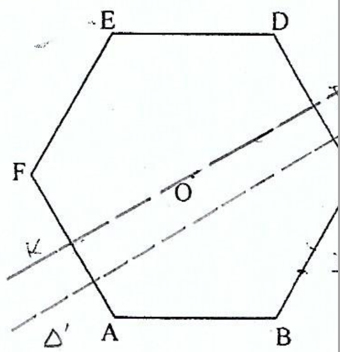
b)En déduire que $R_1 \circ R_{(A,-\frac{\pi}{3})} = t_{\overrightarrow{AB}}$.

c)Soit M un point du plan P . On pose $M' = R_{(A,\frac{\pi}{3})}(M)$ et $M'' = R_1(M)$.

Montrer que $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{AB}$.

Exercice n°3

Dans le graphique ci-contre ABCDEF est un hexagone régulier direct de centre O. ,
Soit f une isométrie du plan tel que f (A) = O et f (B) = D.
On pose $g = f \circ t_{\overrightarrow{OA}}$.



1°/ a) Déterminer g (O) et g (C).
   b) Quelles sont les natures possibles de g ?

2°/ Soit I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CD]$ et $[AF]$.
   On suppose que g est une rotation.
   a) Déterminer son centre et son angle.
   b) Caractériser les isométries $S_{(OC)} \circ S_{(OI)}$ et $S_{(OI)} \circ S_{(BF)}$
   c) Déterminer alors l'isométrie f.

3°/ On suppose que g est une symétrie orthogonale
   a) Déterminer l'axe de g.
   b) Caractériser l'isométri
   c) En déduire que ... et le vecteur.

Série n° 9

Ex 3

f une isométrie du Plan tel que
$f(A)=O$
$f(B)=D$

On pose $g = f \circ t_{\overrightarrow{OA}}$

1) a/ * On a $g(O) = f \circ t_{\overrightarrow{OA}}(O)$
$= f(A)$
$= O$

* $g(C) = f \circ t_{\overrightarrow{OA}}(C)$.

Comme ABCDEF hexagone régulier de centre O alors $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$.

d'où $t_{\overrightarrow{OA}}(C) = B$.

Par suite $g(C) = f(B)$
$= D$.

b) On a g fixe le point O et $g \neq Id$ car $g(C) = D \neq C$.
donc g est soit une rotation de centre O, soit une symétrie axiale d'axe passant par O.

2) On pose $I = B * C$; $K = A * F$
$J = C * D$;

On suppose que g est ~~une~~ rotation.

a) Comme $g(O) = O$.
alors g a pour centre O.
or $(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
car ABCDEF regulier de centre O
et $g(C) = D$.
donc g est une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) * On a $S_{(OC)} \circ S_{(OI)} = R_{(O, 2(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}}))}$

Comme OBC equilatéral direct et $I = B * C$ } donc $[OI)$ bissectrice de $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}})$

d'où $2(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}})\ [2\pi]$
$\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

ainsi $S_{(OC)} \circ S_{(OI)} = R_{(O, \frac{\pi}{3})}$

$= g$.

* On a BCEF rectangle.
donc $(BC) \perp (BF)$.
de plus $I = B * C$ et OBC equilatéral } $(OI) \perp (B$
donc $(BF) \parallel (OI)$.

ainsi $S_{(OI)} \circ S_{(BF)} = t_{2\overrightarrow{BI}}$
$= t_{\overrightarrow{BC}}$
$= t_{\overrightarrow{AO}}$.

c) On a $g = f \circ t_{\overrightarrow{OA}}$
ssi $t_{\overrightarrow{AO}} \circ f^{-1} = g^{-1}$
ssi $f^{-1} = t_{\overrightarrow{OA}} \circ g^{-1}$
ssi $f = g \circ t_{\overrightarrow{AO}}$
$= S_{(OC)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(BF)}$
$= S_{(OC)} \circ S_{(BF)}$
$= R_{(F, 2(\widehat{\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FO}}))}$

Or on a dans ABOF :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FO}$; $AB = AF$ } ABOF losange
(FB) bissectrice de

d'où $f = r_{(F, \frac{\pi}{3})}$

3) Supposons que g est une symétrie orthogonale.

a) .. On pose $g = S_\Delta$.

Comme $g(O) = O$ alors $O \in \Delta$.

$g(C) = D$ alors $\Delta = \text{med}\,[CD]$

or dans le triangle équilatéral OCD:

$J = C * D$.

donc $(OJ) = \text{med}\,[CD]$.

d'où $g = S_{(OJ)}$.

b) $S_{(OJ)} \circ t_{\overrightarrow{AK}} = ?$

Comme $\overrightarrow{AK} \perp (OJ)$.

alors $t_{\overrightarrow{AK}} = S_{(OJ)} \circ S_{\Delta'}$

avec $\Delta' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}}(OJ)$

d'où $S_{(OJ)} \circ t_{\overrightarrow{AK}} = S_{(OJ)} \circ S_{(OJ)} \circ S_{\Delta'}$.

$= S_{\Delta'}$.

d'où $S_{(OJ)} \circ t_{\overrightarrow{AK}}$ est une symétrie axiale d'axe $\Delta' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}}(OJ)$

c) On a $f = g \circ t_{\overrightarrow{AO}}$.

$= S_{(OJ)} \circ t_{\overrightarrow{AO}}$.

$= S_{(OJ)} \circ t_{\overrightarrow{AK}} \circ t_{\overrightarrow{KO}}$.

$= S_{\Delta'} \circ t_{\overrightarrow{KO}}$

Comme $\overrightarrow{KO}$ est un vecteur directeur de Δ' (car $\overrightarrow{KO}$ ...

alors f est une symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{KO}$ et d'axe Δ'.

avec $\Delta' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}}(OJ)$.