Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°7 4éme Math	Prof:M.Benali

xercice 1:

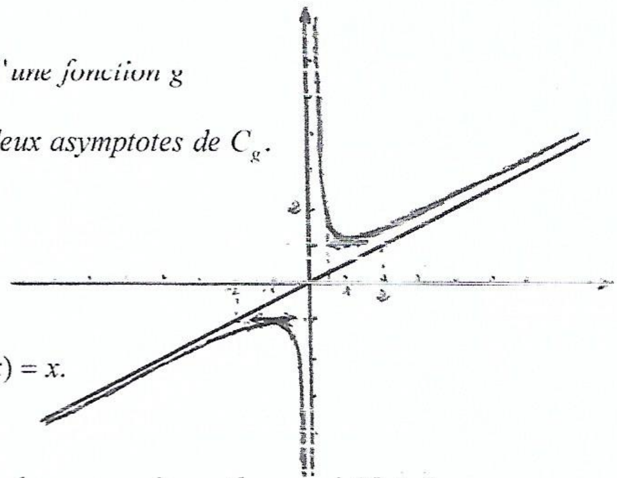
Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = 1+(x-1)\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right) & si\ x \prec 1. \\ f(x) = x-\sqrt{x^2-1} & si\ x \geq 1 \end{cases}$

Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

) Montrer que f est continue en 1.

. Dans le graphique ci-contre, C_g est la courbe représentative d'une fonction g

éfinie sur IR^* telle queles droites Δ : $x=0$ et Δ' : $y=\frac{1}{2}x$ sont deux asymptotes de C_g.



Déterminer graphiquement $g\left(\left]0,1\right]\right)$.

) Vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{1}{2}$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g\circ g(x)}{x}$.

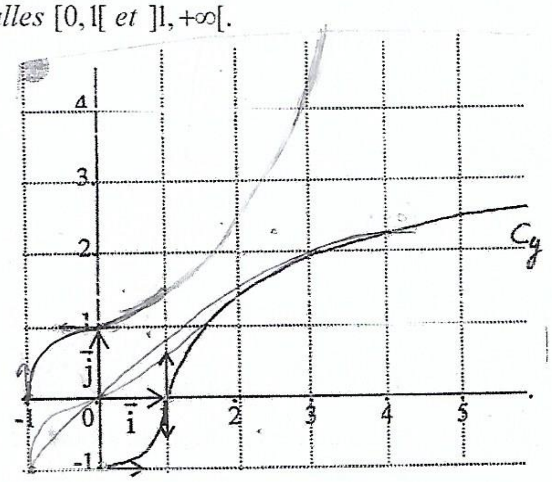
) On donne $g(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$. Montrer que pour tout $x \in \left]0,1\right]$, $f\circ g(x) = x$.

xercice 2:

Dans la figure ci-dessous, C_g représente la courbe représentative dans un repère orthonormé (O,i,j)

'une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur chacun des intervalles $[0,1[$ et $]1,+\infty[$.

$_g$ admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$.



a) Donner le sens de variation de g sur $[0,+\infty[$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{g(x)+1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{g(x)}{x-1}$.

) Soit f a fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^3+1}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Déterminer la nature de la branche infini de C_f.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1.

c) Montrer que f est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$.

d) Montrer que l'équation $f(x)=4$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]2,3[$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

e) Tracer sur la figure, la courbe C_f en précisant la tangente au point d'abscisse 0.

) Soit h la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $h = g\circ f$.

a) Montrer que h est continue sur $[-1,+\infty[$.

b) Donner le sens de variation de h.

c) Déterminer $h([-1,+\infty[)$.

e) Construire les points de C_h d'abscisses $-1, 0, 2$ et α.

Exercice 3 :

Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x)=x^3-x-1$

1)*Montrer* que g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ puis déterminer $g([1,+\infty[)$.

2)*Soit* α la solution dans $[1,+\infty[$ de l'équation $g(x)=0$. Montrer que $\sqrt{\dfrac{\alpha+1}{\alpha}}=\alpha$.

3)*Soit* f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$.

a)Montrer que f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et que pour tout $x\geq 1$, $f'(x)=-\dfrac{1}{2x^2}\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$.

b)Montrer que pour tout $x\geq 1$. $-\dfrac{1}{2}\leq f'(x)\leq 0$.

c)*En* déduire que pour tout $x\geq\alpha$, $-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2}\alpha\leq f(x)\leq\alpha$.

Exercice 4 :

Soit f une fonction dérivable sur IR_+ telle que :

$f'(x)=\dfrac{2x}{\pi\left[(x^2-1)^2+1\right]}$ pour tout $x\geq 0$, $f(1)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$

On considére la fonction g définie sur IR_+ par: $\begin{cases} g(x)=\dfrac{\pi}{2}f\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}\right) & \text{si } x\succ 0 \\ g(0)=\dfrac{\pi}{4} & \end{cases}$

1)*Montrer* que g est *continue* sur IR_+.

2)*Montrer* que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x\succ 0$, $g'(x)=-\dfrac{1}{2(x^2+1)}$.

3)a)Montrer que pour tout $x\succ 0$, $-\dfrac{x}{2}\leq g(x)-g(0)\leq-\dfrac{x}{2(x^2+1)}$.

b)En déduire que g est dérivable à droite en 0.

c)*Dresser* le tableau de variation de g puis tracer sa courbe (C_g) relativemene à un R.O.N$(O,\vec{i},\vec{j})$.

4)*Montrer* que l'équation $g(x)=x$ admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique α et que $\alpha\in]0,1[$

5)Soit (u_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=g(u_n)\ ;\ \forall\ n\in IN \end{cases}$

a)Montrer que pour tout $n\in IN$; $|u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

b)En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

** Prof:M.BenAli **

Série n° 7

Ex 4)

f dérivable sur $\mathbb{R}_+$, $f'(x) = \dfrac{2x}{\pi[(x^2-1)^2+1]}$ pour $x \geq 0$.

$f(1) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

1) pour $x \in \mathbb{R}_+$, $g = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right) & \text{si } x > 0 \\ \frac{\pi}{4} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On a $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{x+1}{x}} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right) = \frac{1}{2}$

ssi $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \frac{\pi}{4} = g(0)$

donc g est continue à droite en 0.

On a :

la fct : $x \mapsto \frac{x+1}{x}$ est continue et ~~strict~~ positive sur $\mathbb{R}^*_+$. (rationnelle).

donc la fct : $x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*_+$.

$\left.\begin{array}{l} \text{or } f \text{ est dérivable donc continue sur } \mathbb{R}_+ \\ \text{~~...~~ et } \sqrt{\frac{x+1}{x}} \geq 0 \text{ pour } x > 0 \end{array}\right\}$

~~f est continue sur~~

$f\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right)$ est conti sur $\mathbb{R}^*_+$.

donc $g : x \mapsto \frac{\pi}{2} f\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*_+$.

or g est continue à droite en 0.

donc g continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) On a $x \mapsto \frac{x+1}{x}$ strictement positif et dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$.

donc $x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$.

$\left.\begin{array}{l} \text{or } x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x}} > 1 > 0 \text{ pour } x > 0 \\ \text{et } f \text{ dérivable sur } \mathbb{R}^*_+ \end{array}\right\}$

$f\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right)$ dérivable

donc g dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$.

$g'(x) = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right)' \cdot f'\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right)$

$g'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \dfrac{\frac{x - x - 1}{x^2}}{2 \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x}}} \cdot \dfrac{2 \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x}}}{\pi\left[\left(\frac{x+1}{x} - 1\right)^2 + 1\right]}$

$= \dfrac{-1}{2 \cdot x^2\left[\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1\right]}$

$= \dfrac{-1}{2(x^2+1)}$

3) a) pour $x > 0$ On a :

$2(x^2+1) > 2 > 0$

ssi $0 < \dfrac{1}{2(x^2+1)} < \dfrac{1}{2}$

ssi $0 > \dfrac{-1}{2(x^2+1)} > -\dfrac{1}{2}$

ssi $0 > g'(x) > -\frac{1}{2}$

* Pour $x > 0$, ~~On suppose~~

Soit $t \in]0, x[$, On a :

~~D'après le théorème des inégalités des accroissements~~

On a $0 < t < x$

ssi $0 < 2 < 2(t^2+1) < 2(x^2+1)$

ssi $-\frac{1}{2} < \dfrac{-1}{2(t^2+1)} < \dfrac{-1}{2(x^2+1)}$

ssi $-\frac{1}{2} < g'(t) < \dfrac{-1}{2(x^2+1)}$

D'après le TIAF :

$\frac{-x}{2} < g(x) - g(0) < \dfrac{-x}{2(x^2+1)}$

b) pour $x>0$, On a $\frac{-1}{2} \le \frac{g(x)-g(0)}{x} \le \frac{-1}{2(x^2+1)}$

Comme : $\lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{2(x^2+1)} = \frac{-1}{2}$ $\Big\}$ $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = -\frac{1}{2}$.

Donc g est dérivable à droite en 0.

c)

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	
g	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	0

on a $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right)$.

or $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x}} = 1. \\ \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0 \quad (\text{car } f \text{ continue en } 1). \end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2} f\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right) = 0.$

4) Soit $h(x) = g(x) - x$. avec $x \ge 0$.

On a ~~$g'(x) \le 0$~~ $h'(x) = g'(x) - 1 < 0$.

donc h est strictement décroissante

$h(0) = g(0) = \frac{\pi}{4}$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) - x = -\infty$

$h([0,+\infty[) = [\frac{\pi}{4}, -\infty[$.

Comme $0 \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[$, alors il existe un unique α (h strictement monotone) tel que $\alpha \in [0,+\infty[$ et $h(\alpha) = 0$.

ssi $g(\alpha) - \alpha = 0$

ssi $g(\alpha) = \alpha$.

Or on a : $f'(x) = \frac{2x}{\pi[(x^2-1)^2+1]} > 0$.

alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

or $\sqrt{\frac{1+1}{1}} = \sqrt{2} > 1 > 0$.

ssi $f(\sqrt{2}) > f(1)$.

ssi $f(\sqrt{2}) > 0$.

ssi $\frac{\pi}{2} \cdot f(\sqrt{2}) > 0$.

ssi $g(1) > 0$

ssi $g(1) - 1 > -1$.

or $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

donc pour $x \ge 0$, $f(x) \le \frac{1}{2}$

ssi $f(\sqrt{2}) \le \frac{1}{2}$

ssi $\frac{\pi}{2} \cdot f(\sqrt{2}) - 1 \le \frac{\pi}{4} - 1 <$

ssi $g(1) - 1 \le 0$.

ssi $h(1) < 0$.

Comme $h(1) < 0$, $h(0) = \frac{\pi}{4} > 0$ $\Big\}$ Selon le TVI, $\alpha \in]0, 1[$.

5) pour $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = g(U_n). \end{cases}$

a) ~~On a $-\frac{1}{2} \le g'(x) \le 0 < \frac{1}{2}$~~

~~donc $|g'(x)| \le \frac{1}{2}$~~

~~; avec $x \ge 0$, $\alpha \in]0,1[$~~

~~$|g(x) - g(\alpha)| \le \frac{1}{2} |x - \alpha|$~~

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{-1}{2} \le g'(x) \le 0 < \frac{1}{2}$

donc $|g'(x)| \le \frac{1}{2}$.

Or * $U_0 = 1 > 0$

* pour $U_n > 0$, $g(U_n) = U_{n+1} > 0$

car $g([0,+\infty[) =]0, \frac{\pi}{4}]$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

or $\alpha > 0$.

D'après le corrollaire du théorème des inégalités des accroissements finis, $|g(U_n) - g(\alpha)| \le \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$

$|U_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$

$\le |U_n - \alpha| \le (\frac{1}{2})^n |1 - \alpha|$