Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°55 4éme Math	Prof:M.Benali

Exercice 1

1- Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $7a-4b=-3$.

2- Pour tout entier n on considère les nombres : $p=4n-1$ et $q=7n-1$.

a- Vérifier que pour tout entier n le couple (p, q) est une solution de l'équation (E).

b- Quelles sont les valeurs possibles du $p\wedge q$?

c- Déterminer l'ensemble des entiers n tels que : $p\wedge q=3$.

3- On considère le système (S) : $\begin{cases} 2x\equiv 3\pmod 7 \\ 3x\equiv 2\pmod 4 \end{cases}$

a- Montrer que le système (S) est équivalent à (S') : $\begin{cases} x\equiv 5\pmod 7 \\ x\equiv 2\pmod 4 \end{cases}$

b- En déduire que les solutions de (S) sont les entiers $x=-2+28k$ où $k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repére orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considére les points $A(1,1,1)$; $B(3,1,0)$; $C(-1,0,1)$ *et* $D(1,-1,2)$

1) a) *Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P .*

b) *Calculer* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$; *en déduire l'aire du triangle ABC.*

c) *Déterminer une équation cartésienne du plan P .*

2) a) *Vérifier que ABCD est un tétraédre et calculer son volume .*

b) *En déduire la distance du point D au plan P .*

3) *Soit Q le plan d'équation* $2x+y+2z+1=0$. *Montrer que P et Q sont sécants suivant une droite* Δ *dont on donnera une représentation paramétrique.*

4) *Soit* α *un réel et* I_α *le point de coordonnées* $(1,-1,\alpha)$.

a) *Vérifier que* I_α *est équidistant des plans P et Q .*

b) *Pour quelle valeur de* α_0, I_{α_0} *est un point de* Δ.

c) *Montrer que pour tout* $\alpha\neq\alpha_0$ *il existe une sphére* S_α *de centre* I_α *et tangente à la fois aux plans P et Q. Quel est son rayon? Ecrire une équation de* S_α.

5) *Soit f l'application de l'espace dans lui meme qui à tout point* $M(x,y,z)$ *associe le point* $M'(x',y$

tels que : $\begin{cases} x'=2x-1 \\ y'=2y+1 \\ z'=2z-2 \end{cases}$

a) *Déterminer la nature de f et préciser ses elements caractéristiques.*

b) *Déterminer une équation du plan P' image de P par f.*

Exercice 3

Soit E l'ensemble des fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0,+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle : $x f'(x)-(2x+1)f(x)=8x^2$.

1) Démontrer que si une fonction f appartient à l'ensemble E alors la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $y'=2y+8$.

2)a) Résoudre l'équation différentielle: $y'=2y+8$.

b) Déterminer alors les éléments de l'ensemble E.

3) Déterminer la fonction f de l'ensemble E dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point A (ln2 ,0).

Exercice n° 4

On considére l'équation différentielle (E): $y'+y=\dfrac{e^{3-x}}{x}$ pour tout $x \succ 0$.

1) Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=e^{3-x}\ln x$, Vérifier que f est une solution de (E) puis resoudre (E).

2) Soit la fonction u définie par $u(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x,\ x \succ 0$.

a) Etudier les variations de u.

b) Déduire que l'equation $u(x)=0$ admet une unique solution α et que $\dfrac{3}{2} \prec \alpha \prec 2$.

c) Dresser le tableau de varitions de $u(x)$.

3)a) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha . e^{\alpha-3}}$. déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

b) Etudier les variations de f et tracer sa courbe C dans un repére du plan.

c) Justifier qure la restriction de f à $]0,\alpha]$ réalise une bijection sur un intervalle qu'on précisera.

Soit g la réciproque de cette restrection. Tracer dans le méme repére la courbe C' de g.

d) On pose $A=\int_1^{\alpha} f(t)\,dt$ et $B=\int_0^{f(\alpha)} g(t)\,dt$

Donner une interpretation géométrique de chacun des intégrales A et B puis Montrer que : $A=\alpha f(\alpha)-B$

4) On pose $I=\int_2^3 f(x)dx$

a) Justifier l'existence de I et en donner une interpretation géométrique.

b) Montrer que : $I=f(2)-f(3)+\int_2^3 \dfrac{1}{xe^{x-3}}dx$.

c) Montrer que $\forall x \in [2,3]$, $\dfrac{1}{3}e^{3-x} \le \dfrac{1}{xe^{x-3}} \le \dfrac{1}{2}e^{3-x}$ .En déduire un encadrement de I.

5) Pour tout $n \ge 2$, on pose $S_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(2+\dfrac{k}{n}\right)=\dfrac{1}{n}\left(f(2+\dfrac{1}{n})+f(2+\dfrac{2}{n})+f(2+\dfrac{3}{n})+....+f(2+\dfrac{n-1}{n})+f(3)\right)$

a) En utilisant le sens de variation de f sur $[2,3]$ montrer que pour tout entier naturel k tel que $1 \le k \le n$ on a:

$f\left(2+\dfrac{k}{n}\right) \le f(x) \le f\left(2+\dfrac{k-1}{n}\right)$

b) En déduire que : $\dfrac{1}{n}f\left(2+\dfrac{k}{n}\right) \le \int_{2+\frac{k-1}{n}}^{2+\frac{k}{n}} f(x)dx \le \dfrac{1}{n}f\left(2+\dfrac{k-1}{n}\right)$ et que: $S_n \le I \le S_n+\dfrac{1}{n}\left(f(2)-f(3)\right)$

**** Bon travail *** Prof : Mr Ben Ali ****

Série n° 55

Ex 4

(E) : $y' + y = \dfrac{e^{3-x}}{x}$; $x > 0$.

1) $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = e^{3-x} . \ln x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$.

pour $x > 0$, $f'(x) = -e^{3-x} \times \ln x + e^{3-x} \times \dfrac{1}{x}$.

sig $f'(x) = -f(x) + \dfrac{e^{3-x}}{x}$.

sig $f'(x) + f(x) = \dfrac{e^{3-x}}{x}$; $x > 0$.

D'où f solution de (E).

On pose g solution de (E).

ssi $g'(x) + g(x) = \dfrac{e^{3-x}}{x}$

ssi $g'(x) + g(x) = f'(x) + f(x)$

ssi $g'(x) - f'(x) + g(x) - f(x) = 0$

ssi $(g-f)'(x) + (g-f)(x) = 0$.

ssi $(g-f)$ solution de (E_0) : $y' + y = 0$.

$(E_0) \Leftrightarrow y' = -y$.

Les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$y(x) = k e^{-x}$; $k \in \mathbb{R}$.

D'où pour $x > 0$,

$(g-f)(x) = k e^{-x}$; $k \in \mathbb{R}$.

$g(x) = k e^{-x} + f(x)$; $k \in \mathbb{R}$

$= k e^{-x} + \dfrac{e^{3-x}}{x}$; $k \in \mathbb{R}$.

2) $u :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto u(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x$.

a/ u est dérivable sur $]0,+\infty[$.

pour $x > 0$,

$u'(x) = \dfrac{-1}{x^2} - \dfrac{1}{x} < 0$.

Donc u est strictem

b/ u est continue et strictement décroi

sur $]0,+\infty[$.

Donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers $u(]0,+\infty[) =]\lim_{+\infty} u,$

$=]-\infty,+\infty[=$

Car $\begin{cases} \lim_{+\infty} u = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} - \ln x \\ = 0 - \infty \\ \lim_{0^+} u = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} - \ln x \\ = +\infty \end{cases}$

Comme $0 \in \mathbb{R}$, alors $u(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0,$

Or $u\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = 0,261 > 0$

$u(2) = \frac{1}{2} - \ln 2 = -0,193 < 0$

D'où $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$.

c/

x	0		$3/2$		α		2		$+\infty$
$u'(x)$				$-$					
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$			0			$\searrow$	$-\infty$

3) a/ On a $f(\alpha) = e^{3-\alpha} . \ln \alpha$.

Or $u(\alpha) = 0$

ssi $\dfrac{1}{\alpha} - \ln \alpha = 0$

ssi $\ln \alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.

D'où $f(\alpha) = \dfrac{1}{e^{\alpha-3} . \alpha}$

Comme $0 < \frac{3}{2} < \alpha < 2$

alors $\frac{1}{2} < \frac{1}{\alpha} < \frac{2}{3}$

et $-\frac{3}{2} < \alpha - 3 < -1$

$0 < e^{-1,5} < e^{\alpha-3} < e^{-1}$

$0 < e^{1} < \dfrac{1}{e^{\alpha-3}} < e^{1,5}$

D'où $\dfrac{e}{2} < \dfrac{1}{\alpha . e^{\alpha-3}} < \dfrac{2}{3} . e^{1,5}$

$\dfrac{e}{2} < f(\alpha) < \dfrac{2}{3} e^{1,5}$

b/ f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

pour $x > 0$, $f'(x) = -e^{3-x} . \ln x$

$= e^{3-x} ($

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

On a $\begin{cases} x > \alpha \text{ ssi } & u(x) \lneq u(\alpha) \\ & u(x) < 0. \\ x < \alpha \text{ ssi } & u(x) > u(\alpha) \\ \text{ssi} & u(x) > 0. \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{3-x} \cdot \ln x$

$= -\infty.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3-x} \cdot \ln x \cdot x}{x}$

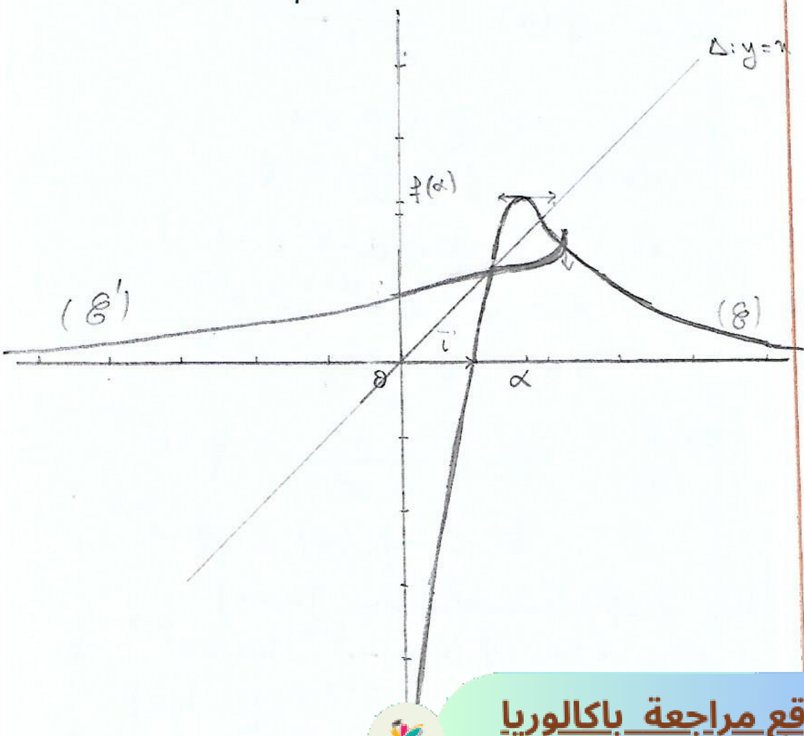
$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} \cdot e^3 \cdot \dfrac{x}{e^x}$

$= 0.$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0 \end{cases}$

On prendra $\alpha = 1,7$. ; $f(1) = 0$

$f(\alpha) = 2,16$



c/ f est continue et strictement croissa[nte]
sur $]0, \alpha]$. ($f'(x) > 0$ sur $]0, \alpha[$ et $f'(\alpha$
Donc elle réalise une bijection de $]$
sur $f(]0, \alpha]) =]\lim\limits_{0^+} f, f(\alpha)]$

$=]-\infty, \underbrace{\dfrac{1}{\alpha \cdot e^{\alpha-3}}}_{f(\alpha)}]$

d) $A = \int_1^{\alpha} f(t)\,dt$ et $B = \int_0^{f(\alpha)} g(t)\,dt$.

A est égal à la mesure d'aire de l[a]
partie du plan limitée par C, l'ax[e]
des abscisses et les droites d'eq :
$x = \alpha$ et $x = 1$.

B est égal à celle limitée [par]
C', l'axe des abscisses et les d[roites]
d'équations $y = f(\alpha)$ et $x = 0$.

* Pour des raisons de symétrie, l['aire]
de la partie du plan décrite dans [...]
est égale à celle de la partie du p[lan]
limitée par C, les axes du repère
et la droite d'équation $y = f(\alpha)$.

D'où $A + B$ est égale à la mesure [d'aire]
du rectangle limité par les axes [du]
repère et les droites d'équations $y = [f(\alpha)]$
et $x = \alpha$, donc de côtés $f(\alpha)$ et [α].

Par suite $A + B = \alpha \cdot f(\alpha)$

ssi $A = f(\alpha) \times \alpha - B$.

4) On pose $I = \int_2^3 f(x)\,dx$.

f est continue sur $]0, +\infty[$, en
particulier sur $[2, 3]$. D'où l'exis[tence]
de I.

I est égale à la mesure d'aire de
la partie du plan limitée par C,
l'axe des abscisses et les droites
d'équations : $x = 2$ et $x = 3$.

b/ f solution de (E) ssi pour x [...]

$f''(x) = -f'(x) + \dfrac{e^{3-x}}{x}$

$[I] = \int_2^3 \left(\dfrac{e^{3-x}}{x} - \right.$

$$I = \int_3^2 f'(x)\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x\cdot e^{x-3}}\,dx$$

$$I = f(2) - f(3) + \int_2^3 \frac{1}{x\cdot e^{x-3}}\,dx$$

c/ pour tout $x \in [2,3]$, On a

$$0 < 2 \leq x \leq 3$$

alors $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ et $e^{3-x} > 0$.

ssi $\frac{1}{3} e^{3-x} \leq \frac{e^{3-x}}{x} \leq \frac{1}{2} e^{3-x}$

ssi $\frac{1}{3} e^{3-x} \leq \frac{1}{x\cdot e^{x-3}} \leq \frac{1}{2} e^{3-x}$

donc $\frac{1}{3}\int_2^3 e^{3-x}dx \leq \int_2^3 \frac{1}{x\cdot e^{x-3}}\,dx \leq \frac{1}{2}\int_2^3 e^{3-x}dx$

ssi $\frac{1}{3}\left[-e^{3-x}\right]_2^3 \leq \int_2^3 \frac{1}{x\, e^{3-x}}\,dx \leq \frac{1}{2}\cdot\left[-e^{3-x}\right]_2^3$

ssi $\frac{1}{3}(e-1) \leq I - f(2) + f(3) \leq \frac{1}{2}(e-1)$

$\frac{1}{3}(e-1) + f(2) - f(3) \leq I \leq \frac{1}{2}(e-1) + f(2) - f(3)$

5) pour $n \geq 2$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(2 + \frac{k}{n}\right)$

a/ pour tout entier $\cancel{k \in [1,n]}$ $1 \leq k \leq n$; On a

$$0 \leq k-1 \leq k \leq n.$$

~~ssi $2 \leq 2 + \frac{k-1}{n} \leq 2 + \frac{k}{n} \leq 3$~~

d'où $0 \leq \frac{k-1}{n} \leq \frac{k}{n} \leq 1$

" $2 \leq 2 + \frac{k-1}{n} \leq 2 + \frac{k}{n} \leq 3$

Or f décroissante sur $[2,3]$.

donc $\cancel{f}$ pour $x \in \left[2 + \frac{k-1}{n} ; 2 + \frac{k}{n}\right]$

On a $f\left(2 + \frac{k}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(2 + \frac{k-1}{n}\right)$.

b/ Donc On pose $a = 2 + \frac{k}{n}$, $b = 2 + \frac{k-1}{n}$.

$$\int_{2+\frac{k-1}{n}}^{2+\frac{k}{n}} f\left(2+\frac{k}{n}\right)dx \leq \int_b^a f(x)\,dx \leq \int_b^a f(b)\cdot dx$$

donc $f\left(2 + \frac{k}{n}\right)\left(2 + \frac{k}{n} - \left(2 + \frac{k-1}{n}\right)\right) \leq \int_b^a f(x) \leq$

" $\frac{1}{n}\cdot f\left(2 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_b^a f(x)\,dx$

et $\int_b^a f(x)\,dx \leq (b-a)\cdot f(b)$

$\int_b^a f(x)\,dx \leq \frac{1}{n}$

donc :

$$\frac{1}{n}\cdot f\left(2 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{2+\frac{k-1}{n}}^{2+\frac{k}{n}} f(x)\,dx \leq \frac{1}{n}\cdot f\left(2 + \frac{k}{n}\right.$$

pour $\cancel{k \in [1,n]}$ $1 \leq k \leq n$ et $n \in$

d'où :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot f\left(2 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_2^3 f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(2 +\right.$$

$$S_n \leq I \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(2 + \frac{k}{n}\right)$$

$$S_n \leq I \leq S_n + \frac{1}{n}\left(f(2) - f\right.$$

Ex 4

1) $(E) : 7a - 4b = -3$

On a $-7 + 4 = -3$

donc $(-1,-1)$ solution de (E)

On pose (a,b) " " "

sig $7a - 4b = 7\times(-1) - 4\cdot(-1)$

" $7(a+1) = 4(1+b)$.

Comme $7 \mid 7(a+1)$

alors $7 \mid 4(1+b)$ et $7 \wedge 4 = 1$ $\Big\}$ $7 \mid 1+b$.

D'où il existe $k \in \mathbb{Z}$ /

$$b + 1 = 7k$$

$$b = 7k - 1.$$

D'où $7(a+1) = 4\times(1 + 7k - 1)$

sig $a + 1 = 4k$

sig $a = 4k - 1$

D'où $\begin{cases} a = 4k-1 \\ b = 7k-1 \end{cases}$; $k \in \mathbb{Z}$

Réciproquement, si $\begin{cases} a = 4k-1 \\ b = 7k-1 \end{cases}$; k

alors $7a - 4b = 7\times 4k - 7 - 4\times 7k$

$= -3$

D'où (a,b) solution de (E).

$$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(4k-1, 7k-1) ; k \in \mathbb{Z}\}$$

2) $\begin{cases} p = 4n - 1 \\ q = 7n - 1 \end{cases}$; $n \in \mathbb{Z}$

a/ On a $7p - 4q = -3$.

donc (p, q) solution de (E).

b/ On pose $d = p \wedge q$.

$\left.\begin{array}{l} d \mid p \\ \text{et } d \mid q \end{array}\right\}$ $d \mid 7p - 4q$

$d \mid -3$

donc $d \in \{1, 3\}$.

c/ $p \wedge q = 3$ donc $3 \mid p$ et $3 \mid q$

d'où $p \equiv 0 \pmod 3$

" $4n - 1 \equiv 0 \pmod 3$

" $n + 3n \equiv 1 \pmod 3$

" $n \equiv 1 \pmod 3$

" $n = 3k + 1$; $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $n = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}$

alors $n \equiv 1 \pmod 3$

$\underline{3n \equiv 0 \pmod 3}$

$4n - 1 \equiv 0 \pmod 3$

et $7n - 1 \equiv 0 \pmod 3$

donc $3 \mid p$ et $3 \mid q$

d'où $3 \mid p \wedge q$

$3 \mid d$ et $d \in \{1, 3\}$

$\Rightarrow d = 3$.

Conclusion : $p \wedge q = 3$

ssi $p = 4 \times (3k + 1) - 1$

$= 12k + 3$

$q = 7 \times (3k + 1) - 1$

$= 21k + 6$.

avec $k \in \mathbb{Z}$.

3) (S) : $\begin{cases} 2x \equiv 3 \pmod 7 \\ 3x \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$

a/ On a $2x \equiv$ …

alors $3x$ …

alors $6x - 7x \equiv 9 \pmod 7$

" $-x \equiv 9 \pmod 7$

" $x \equiv -9 \pmod 7$

" $x \equiv 5 \pmod 7$

et on a $3x \equiv 2 \pmod 4$

alors $3x - 4x \equiv 2 \pmod 4$

" $-x \equiv 2 \pmod 4$

" $x \equiv -2 \pmod 4$

" $x \equiv 2 \pmod 4$

Réciproquement si $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod 7 \\ x \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$

alors $\begin{cases} 2x \equiv 10 \pmod 7 \\ 3x \equiv 6 \pmod 4 \end{cases}$

alors $\begin{cases} 2x \equiv 3 \pmod 7 \\ 3x \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$

Conclusion : (S) : $\begin{cases} 2x \equiv 3 \pmod 7 \\ 3x \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$

est équivalent à (S') : $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod 7 \\ x \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$

b/ On a $(S) \Longleftrightarrow (S')$ $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod 7 \\ x \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \equiv 5 - 7 \pmod 7 \\ x \equiv 2 - 2 \pmod 4 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \equiv -2 \pmod 7 \\ x \equiv -2 \pmod 4 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2 \equiv 0 \pmod 7 \\ x + 2 \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$

Comme $7 \wedge 4 = 1$.

alors $x + 2 \equiv 0 \pmod{28}$.

D'où $x + 2 = 28k$, $k \in \mathbb{Z}$

$x = -2 + 28k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $x = -2 + 28k$, $k \in$

alors $x + 2 = 7 \times 4 \times k$, $k \in \mathbb{Z}$

d'où $\begin{cases} x + 2 \equiv 0 \pmod 7 \\ x + 2 \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$

" $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod 7 \\ x \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$

… de (S') donc de …

Ex 2

$A(1, 1, 1)$
$B(3, 1, 0)$
$C(-1, 0, 1)$
$D(1, -1, 2)$.

1) a/ On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$

Comme $\begin{vmatrix}2 & -2\\0 & -1\end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

D'où, A, B et C déterminent un plan $P = (ABC)$.

b/ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2 & -2\\-1 & 0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2 & -2\\0 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$

On a $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{1+4+4}$

$= \frac{3}{2}$ u.a.

c/ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

D'où $P: -x+2y-2z+d=0; d\in\mathbb{R}$

Or $A(1,1,1)\in P$.

donc $-1+2-2+d=0$

$d=1$.

$$\boxed{P: +x-2y+2z-1=0}$$

2) a/ On a $D(1,-1,2)$.

Comme $-1-2-4+1=-6\neq 0$.

donc $D\notin P$.

D'où ABCD e[...]

$\mathcal{V} = \frac{1}{6}\cdot|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|$

Comme $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$

d'où $\mathcal{V} = \frac{1}{6}\cdot|-1\times 0-2\times 2-2\times 1|$

$= \frac{1}{6}\cdot|-6|$

$= 1$ u.v.

b/ On a $\mathcal{V} = \mathcal{A}_{ABC}\times d(D,P)$

donc $d(D,P) = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{A}_{ABC}}$

$= \frac{1}{\frac{3}{2}}$

$= \frac{2}{3}$.

3) $Q: 2x+y+2z+1=0$.

On a $\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-[...]\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{vmatrix} = 4+1 = 5\neq 0$.

D'où $\overrightarrow{n_Q}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

D'où P et Q sont sécants suivant la droite Δ.

$\Delta: \begin{cases}x-2y+2z-1=0\\2x+y+2z+1=0\end{cases}$

ssi $\Delta: \begin{cases}2z = 1+2y-x\\2x+y+1+(1+2y-x)=0\end{cases}$

ssi $\Delta: \begin{cases}2z = 1+2y-x\\x+3y+2=0\end{cases}$

ssi $\Delta: \begin{cases}2z = 1+2y+3y+2\\-x = 3y+2\end{cases}$

ssi $\Delta: \begin{cases}z = \frac{5}{2}y+\frac{3}{2}\\x = -3y+2\end{cases}$

On pose $y = \beta$, $\beta\in\mathbb{R}$.

$\Delta: \begin{cases}x = -3\beta+2\\y = \beta\end{cases}$

4) $\alpha \in \mathbb{R}$, $I_\alpha(1,-1,\alpha)$.

a/ On a $d(I_\alpha,P) - d(I_\alpha,Q)$

$$= \frac{|1+2+2\alpha-1|}{\sqrt{9}} - \frac{|2-1+2\alpha+1|}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$= \frac{|2+2\alpha|}{3} - \frac{|2+2\alpha|}{3}$$

$$= 0.$$

Donc I_α est équidistant aux plans P et Q.

b/ On pose $\alpha_0 \,/\, \{I_{\alpha_0}\} \in P \cap Q$.

Comme I_{α_0} est équidistant à P et Q

Il suffit que $d(I_{\alpha_0},P)=0$.

ssi $\frac{|2+2\alpha_0|}{3} = 0$.

$2+2\alpha_0 = 0$

$\alpha_0 = -1$.

pour $\alpha = \alpha_0 = -1$, $I_{\alpha_0} \in \Delta$.

c/ Pour tout $\alpha \neq \alpha_0$,

$d(I_\alpha,P) = d(I_\alpha,Q) \neq 0$.

D'où il existe une sphère S_α de centre I_α tangente à P et Q à la fois.

Son rayon R_α est égal à :

$d(I,P) = \frac{|2+2\alpha|}{3} = R_\alpha$.

On a :

$S_\alpha = \text{Sphère}(I_\alpha(1,-1,\alpha), R_\alpha)$.

D'où S_α a pour equation :

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-\alpha)^2 = \frac{(2+2\alpha)^2}{9}$$

5) $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$

$M(x,y,z) \longmapsto M'(x',y',z') /$

$$\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y + 1 \\ z' = 2z - 2 \end{cases}$$

f est de la forme :

$h : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$

$M(x,y,z) \longmapsto M'(x',y',z') /$

$$\begin{cases} x' = k.x + \alpha \\ y' = ky + \beta \\ z' = kz + \gamma \end{cases} ;$$

avec k, α, β, γ sont des réels

Donc f est l'homothétie de centre

$H\left(\frac{-1}{1-2}, \frac{1}{1-2}, \frac{-2}{1-2}\right)$

et de rapport $k=2$.

D'où $f = h_{(H(1,-1,2),\,2)}$

$= h_{(D,\,2)}$

b/ On pose $P' = f(P)$.

On a $\left.\begin{array}{l} P' \,//\, P. \\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \perp P \end{array}\right\}$ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \perp$

D'où $P' : x - 2y + 2z + d' = 0$.

Or $C \in P$ donc $C' = f(C) \in P'$

avec $\begin{cases} x_{C'} = 2x_C - 1 \\ y_{C'} = 2y_C + 1 \\ z_{C'} = 2z_C - 2 \end{cases}$

sig $C'(-3, 1, 0)$.

D'où $-3 - 2\times 1 + 2\times 0 + d' = 0$

$d' = 5$.

$$\boxed{P' : x - 2y + 2z + 5 = 0}$$