Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°54 4éme Math	Prof:M.Benali

Exercice 1:

On considère des composants éléctroniques dont la durée de vie X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda \succ 0$.
Une étude statistique a montré que 12.5% d'un lot important de ces composants sont encore en etat de marche au bout de 300 semaines.

1) Montrer que $\lambda = 10^{-2} Ln2$.

2) On prélève un composant au hasard. Calculer la probabilité des évènements :

A_1 : "La durée de vie de ce composant est supérieure à 400 semaines."

A_2 : "Le composant a une durée de vie entre 300 et 400 semaines."

3) On prélève au hasard 10 de ces composants. Quelle est la probabilité que deux au moins ont une durée de vie supérieur à 400 semaines

4) Sachant qu'un composant a déjà fonctionner 300 semaines. Quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieur à 400 semaines.

Exercice 2:

La durée de vie (en mois) d'une pièce éléctronique est une variable aléatoire X qui suit une loit exponentielle de paramétre $\lambda \succ 0$.

1) Déterminer λ pour que $P(X \le 20) = 3.P(X \ge 20)$.

On prend dans la suite de l'exercice $\lambda = 7.10^{-2}$.

2)a) Quelle est la probabilité que la pièce ait une durée supérieur à 300 mois.

b) Sachant qu'une pièce à déjà dépassée 30 mois de fonctionnement, quelle est la probabilité pour qu'elle fonctionne encore 10 mois.

3) On dispose d'un lot de 40 pièce identiques et on suppose que la durée de vie des compsants est indépendantes les uns des autres.

a) Quelle est la probabilité qu'exactement deux composants ont une durée supèrieur à 30 mois.

b) Quel est par lot de 40 pièces le nombre moyen de pièce ayant une durée supérieur à 30 mois.

Exercice 3:

Dans une usine on fabrique des appareils éléctroniques. L'unité de controle de l'entreprise a montré que 4% des apparaiels présente un défaut thechnique et 2.5% des appareils présentent un défaut éléctronique. Un controle a montré aussi que les deux défauts sont indépendants. Un appareil est défectueux lorsqu'il présente au moins l'un des deux défauts.

1) Montrer que 6.4% des appareils produits sont défectueux.

2) On achète n appareils de l'usine. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre d'appareils défectueux figurants dans ce lot $(n \ge 1)$.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer son écart-type.

b) Déterminer la plus grande valeur de n pour laquelle la probabilité d'avoir au moins un appareil défectueux dans ce lot soit plus petit que $\frac{1}{8}$.

3) On suppose que la durée de vie (en année) d'un appareil défectueux (respectivement non défectueux) suit une loi exponentielle de paramètre 6.10^{-4} (respectivement 2.10^{-4}).

a) Calculer dans chaque cas la probabilité qu'un appareil ait une durée supèrieur à 10 ans.

b) Soit X la durée de vie d'un appareil acheté au hasard. Expirmer en fonction de x la probabilité $P(X \ge x)$ que l'appareil soit encore en état de marche après x ans.

c) Sachant que l'appareil acheté a fonctionner 10 ans, quelle est la probabilité qu'il soit défectueu.

Exercice 4:

Le service après -vente d'une entreprise, vendant une certaine marque de calculatrices, s'est aperçu que ces dernières pourraient présenter deux types de défaut, l'un lié au clavier, l'autre à l'affichage.
Des études statistiques ont permis à l'entreprise d'utiliser la modélisation suivante :
La probabilité pour une calculatrice tirée au hasard de présenter un défaut de clavier est égale à 0,04. En présence du défaut de clavier, la probabilité que la calculatrice soit en panne d'affichage est de 0,03.
Alors qu'en l'absence de défaut de clavier, la probabilité de ne pas présenter de défaut d'affichage est de 0,94.
On note considère les événement
C : « la calculatrice prés ... ente un défaut d'affichage »
1°) On choisit une calcu

a) Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente les deux défauts.

b) Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de clavier.

c) Calculer p(A).

d) Montrer que la probabilité de l'évènement « la calculatrice ne présente aucun défaut » arrondie au millième est 0,902.

2°) Chaque calculatrice est vendue à 35 dinars.

Le service après-vente doit prendre en charge les réparations au cas où aurait un défaut :

- Si la calculatrice présente un défaut de clavier, le coût de la réparation est de 3 dinars.
- Si la calculatrice présente un défaut d'affichage, le coût de la réparation est de 5 dinars.
- Si la calculatrice présente les deux défauts, on rembourse la calculatrice au client.

Soit X la variable aléatoire égale au montant du chiffre d'affaire réalisé par calculatrice vendue

a)Déterminer la loi de probabilité de X

b)Calculer alors le chiffre d'affaire que peut espérer faire l'entreprise par calculatrice.

3°) Une personne commande 50 calculatrices . Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une calculatrice ne présentant aucun défaut ?

4°) On suppose que la durée de vie (exprimé en années) d'une calculatrice de cette marque est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,255$.

a) Quelle est la probabilité qu'une calculatrice dure plus de 2 ans ?

b) Quelle est la probabilité qu'une calculatrice ne tombe pas en panne avant 5 ans ?

c) Quelle est la probabilité qu'une calculatrice qui fonctionne depuis 2 ans dure moins que 5 ans ?

Série 54

Ex 1)

1) On a $p(X \geq 300) = 0{,}125$

ssi $e^{-\lambda \cdot 300} = 0{,}125$

ssi $-300\lambda = \ln(0{,}125)$

$\lambda = \dfrac{-\ln(0{,}125)}{300}$

$= \dfrac{-\ln\left(\frac{1}{8}\right)}{300}$

$= \dfrac{\ln 8}{300}$

$= \dfrac{3 \cdot \ln 2}{300}$

$= 10^{-2} \cdot \ln 2$

2) $p(A_1) = p(X \geq 400)$

$= e^{-10^{-2} \times \ln 2 \times 400}$

$= \dfrac{1}{16}$.

$p(A_2) = p(300 \leq X \leq 400)$

$= e^{-300 \cdot 10^{-2} \ln 2} - e^{-400 \cdot 10^{-2} \ln 2}$

$= e^{-3\ln 2} - e^{-4\ln 2}$

$= 2^{-3} - 2^{-4}$

$= \dfrac{1}{16}$.

3) Soit Y la variable aléatoire qui a pour valeurs le nombre de machines dont la durée de vie est supérieure à 400 semaines, parmi 10 machines.

Y suit la loi binomiale de paramètre $\left(10, \; p(A_1) = \dfrac{1}{16}\right)$.

pour $k \in Y(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$

$p(Y = k) = C_{10}^{k} \cdot ($

~~Soit l'évènement~~.

Il s'agit de calculer

$p(Y \geq 2) = 1 - p(Y \leq 1)$

$= 1 - \left(C_{10}^{1} \cdot \dfrac{1}{16} \cdot \left(\dfrac{15}{16}\right)^9\right) - \left(\dfrac{15}{16}\right)^{10}$

$= 0{,}125899$ à 10^{-6} pre

4) Soit l'évènement

C : " le composant a déjà fonctionné semaines".

Il s'agit de calculer

$p(A_1 / C) = \dfrac{p(A_1 \cap C)}{p(C)}$

$= \dfrac{p(A_1)}{p(C)}$

$= \dfrac{1/16}{e^{-300 \cdot (\ln 2) \times 10^{-2}}}$

$= \dfrac{1}{16 \cdot 2^{-3}}$

$= \dfrac{1}{2}$.

Ex 2)

Soit X une variable aléatoire qui s la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

1) $p(X \leq 20) = 3 \cdot p(X \geq 20)$.

ssi $1 - e^{-20\lambda} = 3 \cdot e^{-20\lambda}$

ssi $1 = 4 \cdot e^{-20\lambda}$.

" $e^{-20\lambda} = \dfrac{1}{4}$

" $-20\lambda = -\ln(4)$

" $\lambda = \dfrac{2 \cdot \ln 2}{20}$

" $\lambda = \dfrac{\ln 2}{10}$

On prend $\lambda = 7 \cdot 10^{-2}$.

2) a/ $p(X \geq 300) = e^{-7 \cdot 10^{-2} \cdot 300}$

$= e^{-21}$

$\simeq 7{,}58 \cdot 10$

b/ $p(X \geq 40 / p \geq 30)$

$$= \frac{p(X \geq 40 \cap X \geq 30)}{p(X \geq 30)}$$

$$= \frac{p(X \geq 40)}{p(X \geq 30)}$$

$$= \frac{e^{-7.10^{-2}.40}}{e^{-7.10^{-2}.30}}$$

$$= e^{-7.10^{-2}.10}$$

$$= e^{-0,7}.$$

$$\simeq 0,496585 \text{ à } 10^{-6} \text{ près.}$$

3) Soit Y la variable aléatoire désignant le nombre de pièces dont la durée de vie est supérieure à 30.

Y suit la loi binomiale de paramètre $(40,\ p(X \geq 30) = e^{-7.10^{-2}.30} = e^{-2,1})$.

pour $k \in Y(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, 40\}$;

$$p(Y=k) = C_{40}^{k} \cdot e^{-2,1.k} \times (1 - e^{-2,1})^{n-k}$$

a/ Il s'agit de calculer

$$p(Y=2) = C_{40}^{2} \cdot e^{-4,2} \times (1 - e^{-2,1})^{38}$$

$$= 0,0817 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

b/ Il s'agit de calculer

$$E(Y) = 40 \times e^{-2,1}$$

$$= 4,898$$

$$\simeq 5 \text{ composants.}$$

Ex 3

1) Soit les évènements :

T : "l'appareil présente un défaut technique"

E : " " " " électronique"

Il s'agit de calculer

$p(E \cup T) = p(E) + \ldots$

$$p(E \cup T) = 0,025 + 0,04 - 0,04 \times 0,\ldots$$

$$= 0,064.$$

2) a/ Y suit la loi binomiale de paramètre $(n,\ 0,064)$.

pour $k \in Y(\Omega) = \{0, 1, \ldots n\}$

$$p(Y=k) = C_n^k \times (0,064)^k . (0,936)^{n-k}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}$$

$$= \sqrt{n \times 0,064 \times 0,936}$$

$$= \sqrt{0,06\, n}.$$

b/ Soit C l'évènement :

"Au moins un appareil est défect…

$$p(C) = 1 - p(Y=0)$$

$$= 1 - (0,936)^n.$$

On a $p(C) \leq \frac{1}{8}$

ssi $(0,936)^n \leq \frac{1}{8}$ … $\ln(\ldots$

ssi $n . \ln(0,936) \ldots$

ssi $n \leq \frac{\ldots \ln(7) - \ldots}{\ln(0,936)}$

$n \leq 2,01$; $n \in \mathbb{N}$.

La plus grande valeur de n cherchée est 2.

3) Soit X_1 la variable qui prend pour valeur la durée de vie d'un appareil défectueux.

X_1 suit la loi exponentielle de para… $\lambda_1 = 6.10^{-4}$.

et soit X_2 la durée de vie d'un appareil non défectueux.

X_2 suit la loi exponenti… de paramètre $\lambda_2 = 2.10^{-4}$.

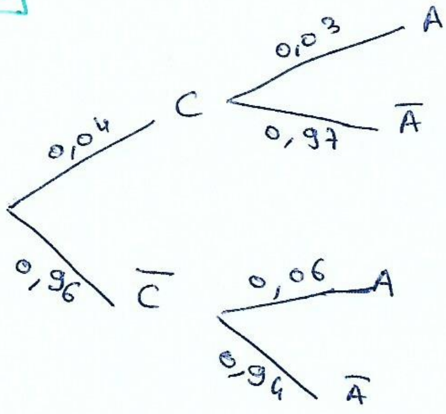
On a $p(X_1 \geq 10) = e^{-10 \times 6 \times 10^{-4}}$

$$= 0,994.$$

$\ldots \geq 10) = e^{-10.2.\ldots}$

Ex 4

1)



a) Il s'agit de calculer :

$p(A\cap C) = p(A/C)\times p(C)$

$= 0,03\times 0,04$

$= 0,0012.$

b/ $p(A\cap \bar{C}) = p(A/\bar{C})\times p(\bar{C})$

$= 0,06\times 0,96$

$= 0,0576.$

c/ $p(A) = p(A\cap C) + p(A\cap\bar{C})$

$= 0,0012 + 0,0576$

$= 0,0588.$

d/ Il s'agit de calculer

$p(\bar{A}\cap\bar{C}) = p(\bar{A}/\bar{C})\times p(\bar{C})$

$= 0,94\times 0,96$

$= 0,9024.$

$= 0,902$ arrondie à 10^{-3}.

2) Soit X la variable aléatoire designant le montant du chiffre d'affaire réalisé par la calculatrice.

$X(\Omega) = \{0, 30, 32, 35\}$

$$\begin{cases} p(X=0) = p(A\cap C) = 0,0012. \\ p(X=30) = p(A\cap\bar{C}) = 0,0576. \\ p(X=32) = p(\bar{A}\cap C) = 0,97\times 0,04 = 0,0388 \\ p(X=35) = p(\bar{A}\cap\bar{C}) = 0,9024 \end{cases}$$

b/ Il s'agit de calc...

$E(X) = 0\times 0,0012 + 32\times 0,0388$
$+ 35\times 0,9024 + 30\times 0,0576$

$= 34,5536$ DT.

Par suite, le chiffre moyen qu'il espère faire par calc. est 34,55 dt.

3) Soit l'évènement S : " Toutes les calculatrices presentent moins un défaut ".

Il s'agit de calculer

$p(\bar{S}) = 1 - p(S)^{50}$

$= 1 - p(A\cup C)^{50}$

$= 1 - (p(A) + p(C) - p(A\cap C))$

$= 1 - (0,0588 + 0,04 - 0,00$

$= 1 - 2,968 . 10^{-51}.$

4) a/ $p(T\geq 2) = e^{-2\times 0,255}$

$= 0,6$

b/ $p(T\geq 5) = e^{-5\times 0,255}$

$= 0,279$

c/ $p(T\leq 5 / T\geq 2) = \dfrac{p(T\geq 2\cap T\leq 5)}{p(T\geq 2)}$

$= \dfrac{p(2\leq T\leq 5)}{p(T\geq 2)}$

$= \dfrac{e^{-0,51} - e^{-5\times 0,255}}{e^{-0,51}}$

$= 0,535.$

b/ $p(X \geq x) = p(D) \times p(X_1 \geq x)$

$+ p(\overline{D}) \times p(X_2 \geq x)$

$= 0{,}064 \times e^{-6.10^{-4}x} + 0{,}936 \times e^{-2.10^{-4}x}$

c/ $p(D \,/\, X \geq 10) = \dfrac{p(D \cap (X \geq 10))}{p(X \geq 10)}$

$= \dfrac{p(X_1 \geq 10) \times p(D)}{p(X \geq 10)}$

$= \dfrac{0{,}994 \times 0{,}064}{0{,}064 \times e^{-6.10^{-4}.10} + 0{,}936 . e^{-2.10^{-3}}}$

$= 0{,}064.$