| Lycée pilote de Bizerte | Serie d'exercices n°34<br>4éme Math | Prof:M.Benali |
|---|---|---|

*Exercice 1 :*

I / Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $f_n$ la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f_n(x)=\dfrac{x^n}{e^x-1} & si\ x\neq 0. \\ f_n(0)=0 \end{cases}$$

$(C_n)$ sa courbe repésentative dans un R.O.N $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1)a) Montrer que $f_n$ est continue sur IR.

b) Etudier la dérivabilité de $f_n$ en 0.

2) On considére la fonction $\varphi_n$ définie sur IR par $\varphi_n(x)=(n-x)e^x - n$

a) Dresser le tableau de variation de $\varphi_n$.

b) Vérifier que pour tout $n\geq 2$; $e^{n-1}-n\succ 0$. En déduire que l'équation $\varphi_n(x)=0$ admet dans IR deux solutions 0 et $\alpha_n$ tel que $n-1\prec\alpha_n\prec n$.

c) Dresser alors suivant la parité de $n$ le tableau de variation de $f_n$.

3)a) Montrer que $f_n$ admet un extremum en $\alpha_n$ et que $f_n(\alpha_n)=\alpha_n^{n-1}(n-\alpha_n)$.

b) Tracer la courbe $C_2$ de $f_2$ On prendra $\alpha_2=1.6$.

II / Pour tout $n\geq 2$ on pose $I_n=\int_{Ln2}^{1} f_n(x)dx$

1) Montrer que la suite $I_n$ est décroissante.

2) Prouver que $I_n$ est convergente .

3)a) Montrer que pour tout $n\geq 2$ ; $\dfrac{1}{e-1}\left[\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{(Ln2)^{n+1}}{n+1}\right]\leq I_n\leq\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{(Ln2)^{n+1}}{n+1}$.

b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

III / Soit $F$ la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $F(x)=\int_{Lnx}^{2Lnx} f_2(t)\,dt$

1)a) Justifier l'existense de $F(x)$ pour tout $x\in[1,+\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x\in\left]1,\sqrt{e}\right[$ il existe un réel $c\in[Lnx\ ,2Lnx]$ tel que :

$$F(x)=\frac{c^2}{e^c-1}Lnx \quad et \quad que \quad \frac{(Lnx)^3}{(x-1)^2}\leq\frac{F(x)}{x-1}\leq\frac{4(Lnx)^3}{(x-1)^2(x+1)}$$

c) En deduire que $F$ est dérivable à droite en 1 et calculer $F_d'(1)$

2)a) Montrer que $F$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $F'(x)=\dfrac{(Lnx)^2}{x(x^2-1)}(7-x)$.

b) Montrer que pour tout $x\in[e^2,+\infty[$ on a : $\dfrac{4(Lnx)^3}{x^2-1}\leq F(x)\leq\dfrac{(Lnx)^3}{x-1}$.

c) Dresser le tableau de variation de $F$ ( On ne cherchera pas a calculer $F(7)$).

BenAli ***

## Série 34

### Ex 1|

I/ $n$ un entier / $n \geq 2$.

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} f_n(x) = \dfrac{x^n}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1) a/ Les fonctions :

$x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
$x \mapsto e^x - 1$ " " et non nulle sur $\mathbb{R}^*$ $\Big\}$. donc
$f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{e^x - 1}$ " sur $\mathbb{R}^*$.

Or $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot x^{n-1}}{e^x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 0} x^{n-1} \times \dfrac{1}{(e^0)'}$

$= 0 \times 1$

$= 0 = f(0)$

donc $f$ continue en $0$.

D'où $f$ continue sur $\mathbb{R}$.

b/ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^n}{x \cdot (e^x - 1)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^{n-1}}{e^x - 1}$

pour $n = 2$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^{2-1}}{e^x - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x - 1}$

$= \dfrac{1}{(e^0)'} = 1 = f_2'(0)$

pour $n > 2$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^{n-1}}{e^x - 1} = \lim\limits_{x \to 0} x^{n-2} \dfrac{x}{e^x - 1}$

$= 0 \times 1$

$= 0 = f_n'(0)$.

pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, $f_n$ est dérivable en $0$.

2/ $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \varphi_n(x) = \ldots$

a/ $\varphi_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

pour $x \in \mathbb{R}$,

$\varphi_n'(x) = n.e^x - e^x - x.e^x$
$= e^x(n - 1 - x)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $n-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_n'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\varphi_n(x)$ | $-n$ | $\nearrow$ | $e^{n-1} - n$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

$\varphi_n(n-1) = (n - n + 1)e^{n-1} - n$
$= e^{n-1} - n$

$\lim\limits_{-\infty} \varphi_n = \lim\limits_{x \to -\infty} ne^x - x.e^x - n$
$= -n$.

$\lim\limits_{+\infty} \varphi_n = \lim\limits_{x \to +\infty} (n - x)e^x - n$
$= -\infty$.

b/ On pose $h : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto e^{x-1} - x$.

$h$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

pour $x \geq 0$, $h'(x) = e^{x-1} - 1$

$h'(x) = 0$ ssi $e^{x-1} = 1 = e^0$
$x = 1$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $e^{-1}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$\lim\limits_{+\infty} h = \lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)\left(\dfrac{e^{x-1}}{x-1} - \dfrac{x}{x-1}\right)$

$= +\infty$.

pour $x \geq 2 > 1$, $h(x) > 0$
$e^{x-1} - x > 0$.

d'où pour tout entier $n \geq 2$,
$e^{n-1} - n > 0$.

D'après le tableau de variation de $\varphi$
On peut déduire que $\varphi_n$ est bijective
de $]-\infty, n-1]$ et $]n-1, +\infty[$ vers respecti[vement]
$]\ldots, e^{n-1} - n]$ et $]e^{n-1} - n, -\infty[$
$\ldots ]-n, e^{n-1} - n]$ et

Alors $\varphi_n(x)=0$ admet deux solutions uniques, l'une dans $]-\infty, n-1]$ et l'autre dans $]n-1,+\infty[$.

On a $0 \in ]-\infty, n-1]$ et $\varphi_n(0)=0$.

donc 0 est la première solution dans $]-\infty, n]$

et On pose $\alpha_n$ la deuxième dans $]n-1,+\infty[$.

On a $\varphi_n(n-1)=e^{n-1}-n>0$

$\varphi_n(n)=-n<0$.

donc $\alpha_n \in ]n-1, n[$.

c/ pour $x \in \mathbb{R}^*$, $n \geq 2$;

$f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$$f_n'(x)=\frac{n x^{n-1}(e^x-1)-e^x \cdot x^n}{(e^x-1)^2}$$

$$=\frac{x^{n-1}(ne^x-n-xe^x)}{(e^x-1)^2}$$

$$=\frac{x^{n-1}\cdot\varphi_n(x)}{(e^x-1)^2}$$

* pour $n=2$, $\begin{cases} f_2'(x)=\dfrac{x\cdot\varphi_2(x)}{(e^x-1)^2}; & x\neq 0. \\ f_2'(0)=1. \end{cases}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_2'(x)$ | | $+$ | $1$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_2(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | | | $f_2(\alpha_2)$ | $\searrow$ | $0$ |

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{e^x-1}=-\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f_2(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=0.$

* pour $n>2$ et $n$ impair:

$n-1$ est pair.

pour $x\neq 0$, $\begin{cases} f_n'(x)=\dfrac{x^{n-1}}{\ldots} \end{cases}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha_n$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_n(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $f_n(\alpha_n)$ | $\searrow$ | $0$ |

* pour $n>2$, et $n$ pair:

$n-1$ est impair.

$\begin{cases} f_n'(x)=\dfrac{x^{n-1}\cdot\varphi_n(x)}{(e^x-1)^2} & \text{si } x\neq 0 \\ f_n'(0)=0 \end{cases}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha_n$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_n(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $f_n(\alpha_n)$ | $\searrow$ | $0$ |

3/ a/ D'après les tableaux de variation dressés, pour $x>0$, $f_n(x)<f_n(\alpha_n)$.

d'où $\alpha_n$ est un maximum de $f_n$.

$$f_n(\alpha_n)=\frac{\alpha_n^n}{e^{\alpha_n}-1}$$

or $\varphi_n(\alpha_n)=0$ ssi

$(n-\alpha_n)e^{\alpha_n}-n=0$

$$e^{\alpha_n}=\frac{n}{n-\alpha_n}$$

$$f_n(\alpha_n)=\frac{\alpha_n^n}{\left(\frac{n}{n-\alpha_n}-1\right)}$$

$$=\frac{\alpha_n^n}{\frac{n-n+\alpha_n}{n-\alpha_n}}$$

$$=\alpha_n^{n-1}(n-\alpha_n).$$

b/ $f_2: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x \mapsto f_2(x)=\dfrac{x^2}{e^x-1}$

$\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x-1}=\ldots$

• pour $x \in ]1, \sqrt{e}[$, $\ln x \in ]0, \frac{1}{2}[$

$2\ln x \in ]0, 1[$.

On pose $0 < \ln x \leq t \leq 2\ln x < 1$ ; $f_2$ croissante sur $]0,1[$.

$$f_2(\ln x) \leq f_2(t) \leq f_2(2\ln x)$$

$$\int_{\ln x}^{2\ln x} f_2(\ln x)\,dt \leq F(x) \leq \int_{\ln x}^{2\ln x} f_2(2\ln x)\,dt$$

$$\ln x \cdot \frac{\ln^2 x}{e^{\ln x} - 1} \leq F(x) \leq \ln x \cdot \frac{4\ln^2 x}{e^{2\ln x} - 1}$$

et $(x-1) > 0$

$$\frac{\ln^3 x}{(x-1)(x-1)} \leq \frac{F(x)}{x-1} \leq \frac{4\ln^3 x}{(x^2-1)(x-1)}$$

$$\frac{\ln^3 x}{(x-1)^2} \leq \frac{F(x)}{x-1} \leq \frac{4\ln^3 x}{(x-1)^2 \cdot (x+1)}$$

c/ pour $x \in ]1, \sqrt{e}[$, On a :

$$\frac{\ln^3 x}{(x-1)^2} \leq \frac{F(x)}{x-1} \leq \frac{4\ln^3 x}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln^3 x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)^3 (x-1)$$

$= 1 \times 0$

$= 0$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{4\ln^3 x}{(x-1)^2(x+1)} = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)^3 \cdot \frac{4(x-1)}{x+1}$$

$= 1 \times \frac{0}{2}$

$= 0$.

donc $\lim_{x\to 1^+} \frac{F(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x-1}$

$= 0 = F'_d(1)$.

Car $F(1) = 0$.

D'où $F$ est dérivable à droite en $1$.

et $F'_d(1) = 0$.

2/ $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

donc elle admet ~~des~~ au moins une primitive $H$ sur $\mathbb{R}$.

$H$, comme étant pri

la fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]1, +\infty[$.

Donc $F$ est dérivable sur $]1, +\infty[$.

pour $x > 1$, $F(x) = H(2\ln x) - H(\ln x)$

$$F'(x) = \frac{2}{x} \cdot f_2(2\ln x) - \frac{1}{x} \cdot f_2(\ln x)$$

$$\text{ssi } F'(x) = \frac{2}{x} \cdot \frac{4\ln^2 x}{e^{2\ln x} - 1} - \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln^2 x}{e^{\ln x} - 1}$$

$$= \frac{8\ln^2 x}{x \cdot (x^2-1)} - \frac{\ln^2 x\,(x+1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{8\ln^2 x - x\ln^2 x - \ln^2 x}{x(x^2-1)}$$

$$= \frac{\ln^2 x\,(7-x)}{x(x^2-1)}$$

$$= \frac{(\ln x)^2}{x(x^2-1)} \cdot (7-x)$$

b/ pour $x \geq e^2$, $\ln x \geq 2$ et $2\ln x \geq \ln x$

On pose $2 \leq \ln x \leq t \leq 2\ln x$ ; $f_2(x)$ décroissante sur $[2;$

$f_2(2\ln x) \leq f_2(t) \leq f_2(\ln x)$ ;

$\ln x \cdot f_2(2\ln x) \leq F(x) \leq f_2(\ln x) \cdot \ln x$

$$\frac{4\ln^3 x}{x^2-1} \leq F(x) \leq \frac{\ln^3 x}{x-1}.$$

c/ pour $x > 1$, $F'(x) = \frac{\ln^2 x}{x(x^2-1)} \cdot (7-x)$

donc le signe de $F'$ est celui de $(7-x)$

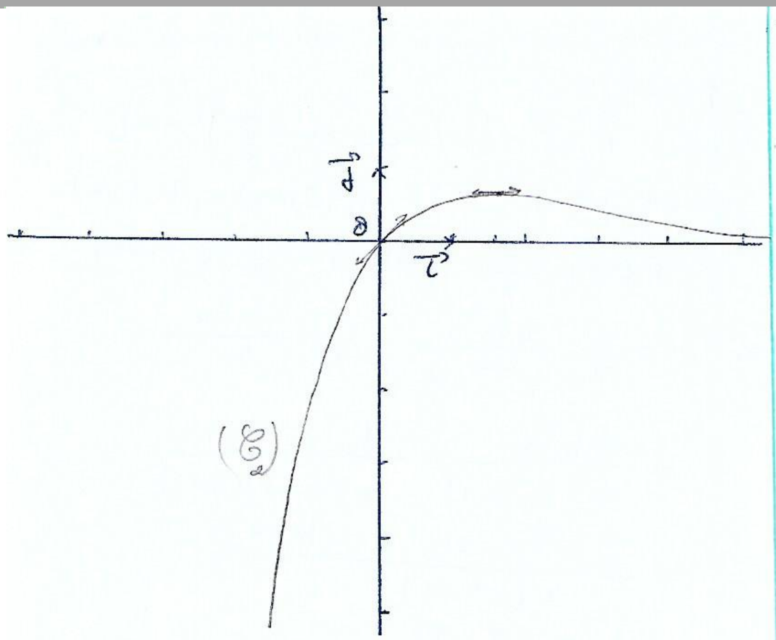
| $x$ | $1$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $F(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $F(7)$ | $\searrow$ | $0$ |

pour $x \geq e^2$, $\frac{4\ln^3 x}{x^2-1} \leq F(x) \leq \frac{\ln^3 x}{x-1}$.

On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{(1-\frac{1}{x^2})} \cdot \frac{\ln^3 x}{x^2} = 4 \times 0 = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^3 x}{x(1-\frac{1}{x})} = 0.$$

donc $\lim_{+\infty} F = 0$.




II/ pour tout $n \geq 2$, $I_n = \int_{\ln 2}^{1} f_n(x)\,dx$.

1) pour $n \geq 2$,

$$I_{n+1} - I_n = \int_{\ln 2}^{1} \frac{x^n(x-1)}{e^x - 1}\,dx.$$

On a pour $\ln 2 \leq x \leq 1$

$$2 \leq e^x \leq e$$

$$0 < 1 \leq e^x - 1$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \dfrac{1}{e^x - 1} \\ 0 < x^n \\ x - 1 < 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{x^n(x-1)}{e^x - 1} < 0 \\ \text{et } \ln 2 \leq 1. \end{array}$$

D'où $\int_{\ln 2}^{1} \frac{x^n(x-1)}{e^x - 1}\,dx \leq 0$.

$$I_{n+1} \leq I_n.$$

D'où $I_n$ est décroissante.

2/ pour tout $n \geq 2$ et $x \in [0, +\infty[$ ;

$f_n(x) \geq 0$.

pour $x \in [\ln 2, 1]$,

$f_n(x) \geq 0$.

$\int_{\ln 2}^{1} f_n(x)\,dx \geq 0$.

D'où ~~$I_{n}$~~ $I$

Par suite : $(I_n)$ est décroissante et minorée par 0. Donc elle est convergente.

3/a/ pour $n \geq 2$ et $x \in [\ln 2, 1]$, On a

$$2 \leq e^x \leq e$$

$$0 < 1 \leq e^x - 1 \leq e - 1$$

$$\frac{1}{e-1} \leq \frac{1}{e^x - 1} \leq 1$$

$$\frac{x^n}{e - 1} \leq \frac{x^n}{e^x - 1} \leq x^n$$

les fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \frac{x^n}{e-1}$ continues sur $[\ln 2, 1]$.

$$\int_{\ln 2}^{1} \frac{x^n}{e-1}\,dx \leq I_n \leq \int_{\ln 2}^{1} x^n\,dx$$

$$\frac{1}{e-1} \cdot \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{\ln 2}^{1} \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{\ln 2}^{1}$$

$$\frac{1}{e-1}\left[\frac{1}{n+1} - \frac{(\ln 2)^{n+1}}{n+1}\right] \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} - \frac{(\ln 2)^{n+1}}{n+1}$$

b/ Comme $\ln 2 \in ]-1, 1[$ alors $\lim_{n \to +\infty} (\ln 2)^{n+1} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{d'où } \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{(\ln 2)^{n+1}}{n+1} = 0. \\ \text{et } \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{e-1}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{(\ln 2)^{n+1}}{n+1}\right) = 0. \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} I_n = 0.$$

III/ $F : [1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto F(x) = \int_{\ln x}^{2\ln x} f_2(t)\,dt$$

1)a/ $f_2$ est continue sur $\mathbb{R}$.

et $x \in [1, +\infty[$ donc $x > 0$ d'où $\ln x$ existe

par suite $F$ existe sur $[1, +\infty[$.