Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°31 4éme Math	Prof:M.Benali

A Soit $n \in IN^*$ et f_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f_n(x) = x^n Ln(1+x)$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f dans un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Pour tout $n \in IN^*$ et pour tout $x \in]-1,+\infty[$ on pose $\varphi_n(x) = nLn(1+x) + \frac{x}{x+1}$.

a) Etudier les variations de φ_n.

b) Calculer $\varphi_n(0)$ en déduire le signe de $\varphi_n(x)$ pour tout $x \in]-1,+\infty[$.

2) a) Etudier les variations de f_1.

b) Pour tout $n \geq 2$; Etudier les variations de f_n et dresser suivant la parité de n son tableau de variation.

c) Etudier la position relative des deux courbes (C_1) et (C_2) puis Tracer dans le meme repére les courbes (C_1) et (C_2).

3) a) Calculer les intégrales $I = \int_0^1 f_1(x)dx$ et $J = \int_0^1 f_2(x)dx$.

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (C_1) et (C_2).

4) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$; l'équation $f_n(x) = 1$ admet dans $[0,+\infty[$ une solution unique α_n.

b) Montrer que $\alpha_n \succ 1$ pour tout $n \in IN^*$.

c) Montrer que la suite (α_n) est décroissante.

B Soit $(v_n)_{n \in IN}$ la suite définie par $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$

On considére la suite $(u_n)_{n \in IN^*}$ définie par $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $(n+1)u_n = Ln2 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$.

b) En déduire que pour tout $n \in IN^*$: $\frac{1}{2(n+2)} \leq Ln2 - (n+1)u_n \leq \frac{1}{n+2}$.

c) En déduire $\lim_{n \to +\infty} (n+1)u_n$.

2) Pour tout $n \in IN^*$ et pour tout $x \succ -1$ on pose : $S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-x)^n$.

a) Montrer que $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $Ln2 - v_n = (-1)^{n+1}\left[Ln2 - (n+1)u_n\right]$

c) Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

Série 31

Ex 1

A/ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n :]-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_n(x) = x^n (\ln(1+x))$

1) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n :]-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \varphi_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$

a/ φ_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$

pour $x > -1$, On a :

$$\varphi_n'(x) = n \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{n}{1+x} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0.$$

x	-1		$+\infty$
$\varphi_n'(x)$		$+$	
$\varphi_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b/ $\varphi_n(0) = n \cdot \ln(1) + \frac{0}{0+1} = 0.$

x	-1		0		$+\infty$
$\varphi_n(x)$		$-$	0	$+$	

Car φ_n était croissante sur $]-1,+\infty[$,

pour $x \in]-1,0]$, $\varphi_n(x) \leq \varphi_n(0)$

$\varphi_n(x) \leq 0.$

2/a/ $f_1 :]-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_1(x) = x \cdot \ln(1+x).$

f_1 est dérivable sur $]-1,+\infty[$.

pour $x > -1$,

$$f_1'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

$$= \varphi_1(x).$$

x	-1		0		$+\infty$
$f_1'(x) = \varphi_1(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b/ pour $n \geq 2$, On a :

~~Si n est pair~~

$f_n(x) = x^n \cdot \ln(1+x).$

f_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$.

On a pour $x > -1$:

$$f_n'(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot \ln(1+x) + \frac{x^n}{1+x}$$

$$= x^{n-1}\left(n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right)$$

$$= x^{n-1} \cdot \varphi_n(x).$$

* Si n est pair, $(n-1)$ est impair.

D'où x^{n-1} a le même signe de x.

x	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

* Si n est impair, $(n-1)$ est pair.

D'où $x^{n-1} > 0.$

x	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c/ pour $x > -1$,

$$f_1(x) - f_2(x) = x \cdot \ln(1+x) - x^2(\ln(1+x))$$

$$= x\left(\ln(1+x) - x\ln(1+x)\right)$$

~~$(f_1(x) - f_2(x))' = f_1'(x) - f_2'(x)$~~

~~$= \varphi_1(x) - x \cdot \varphi_2(x)$~~

$f_1(x) - f_2(x) = x\ln(1+x)(1-x)$

x	-1		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$\ln(1+x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f_1(x)-f_2(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Donc sur $]-1,1]$, (C_1) au-dessus de (C_2).
et sur $[1,+\infty[$, (C_1) au-dessous de (C_2).

3/a) * $I = \int_0^1 f_1(x)\,dx$
$= \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx.$

On pose $u(x) = \ln(1+x)$, $u'(x) = \frac{1}{1+x}$
$v'(x) = x$, $v(x) = \frac{x^2}{2}$.

$$I = \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx$$

$$I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1\left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right)dx.$$

$$I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)\right]_0^1$$

$$I = \cancel{\frac{\ln(2)}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1 + \cancel{\ln(2)} - 0\right).$$

$$I = \frac{1}{4}.$$

* $J = \int_0^1 f_2(x)\,dx$
$= \int_0^1 x^2\ln(1+x)\,dx.$

On pose $u(x) = \ln(x+1)$ $u'(x) = \frac{1}{1+x}$
$v'(x) = x^2$ $v(x) = \frac{x^3}{3}.$

$$J = \left[\frac{x^3\ln(x+1)}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x}\,dx.$$

$= \frac{\ln(2)}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 x.(x-1+ \ldots)\,dx$

$= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - \ldots$

$$J = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \cancel{\ln(2)} - 0\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right) + \frac{2}{3}\ln(2)$$

$$= \frac{-5}{18} + \frac{2\ln(2)}{3}.$$

b/ Puisque (C_1) et (C_2) se coup[ent] aux points 0 et 1.

$$CA = \int_0^1 (f_1(x) - f_2(x))\,dx$$

$$= \int_0^1 f_1(x)\,dx - \int_0^1 f_2(x)\,dx$$

$$= I - J.$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{5}{18} - \frac{2\ln 2}{3}.$$

$$= \frac{19}{36} - \frac{2\ln 2}{3}\ (u.a.)$$

4)a/ pour $n \in \mathbb{N}^*$,
f_n est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
Donc elle bijective de $[0,+\infty[$ sur $f_n([0,+\infty[)$
f_n étant continue sur $[0,+\infty[$.

$$f_n([0,+\infty[) = [f_n(0), \lim_{+\infty} f_n[$$
$$= \mathbb{R}_+.$$

Comme $0 \in \mathbb{R}_+$,
$f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0,+\infty[$

b/ $f_n(1) = 1^n \cdot \ln(2)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
$= \ln(2).$

Comme $\ln 2 < 1$. alors $f_n(1) < f_n(\alpha_n)$
$1 < \alpha_n$
car f_n est croissante sur $[0,+\infty[$ strictement.

c/ * pour $x > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^n . \ln(1+x)(x-1) > 0.$$

D'où $f_{n+1}(x) > f_n(x)$ pour $x > 1$.

* On a : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$; $\alpha_{n+1} > 1$; $n \in \mathbb{N}^*$

$f_n(\alpha_n) = 0$; $\alpha_n > 1$; $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n > 1$; $n \in \mathbb{N}^*$.

f_n est croissante sur $[1, +\infty[$.

Donc $\begin{cases} f_n(\alpha_{n+1}) \geq f_n(\alpha_n). \\ f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_{n+1}) \end{cases}$ or

sig $\begin{cases} f_n(\alpha_{n+1}) \geq 0 \\ f_n(\alpha_{n+1}) < 0 \end{cases}$ Contradiction

D'où $1 < \alpha_{n+1} < \alpha_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

D'où $(\alpha_n)_k$ est décroissante.

B/ pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$

pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1)a/ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

On pose ~~K(x)~~ $= \int_0^1 x^n . \ln(1+x)\,dx$

$K(x) = \ln(1+x)$, $K'(x) = \frac{1}{1+x}$

$h'(x) = x^n$, $h(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

$$u_n = \frac{1}{n+1} . \left[x^{n+1} . \ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1} . \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$$

$$(n+1)u_n = \ln(2) - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx.$$

b/ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(n+1) = \ln(2) - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$

$$\ln(2) - u_n \times (n+1) = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$$

pour $x \in [0,1]$, on a :

pour $n \in \mathbb{N}^*$,

Les fonctions $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{2}$ continues sur $[0,1]$

$x \mapsto x^{n+1}$ " "

et $0 < 1$.

D'où $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \leq \int_0^1$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 \leq \ln(2) - (n+1)\,u_n \leq \left[\right.$$

$$\frac{1}{2(n+2)} \leq \ln 2 - (n+1) . u_n \leq \frac{1}{n+2}.$$

c/ pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2(n+2)} \leq \ln(2) - (n+1)\,u_n \leq$

si $-\ln(2) + \frac{1}{2(n+2)} \leq -u_n \times (1+n) \leq \frac{1}{n+2} - \ln$

avec $(n+1) \neq 0$.

$$A = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} + \frac{\ln(2)}{(n+2)} \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{}{2(}$$

$= B$

~~Comme~~ $A \leq u_n \leq B$.

Comme $\lim_{n \to +\infty} A = \lim_{n \to +\infty} B = 0$.

alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

$\lim_{n \to +\infty} u_n \times (n+1) = \ln 2.$

2) pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > -1$,

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n.$$

a/ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x > -1$: On a :

(1) $S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n$

(2) $(-x) \times S_n(x) = -x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n + ($

(1)-(2) : $(1+x)S_n(x) = 1 - (-x)^{n+1}$; $x + 1 \neq 0$.

$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$$

$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}(x)^{n+1}}{1+x}$$

b/ pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k . \frac{1}{k+1}$$

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k . \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1$$

$$v_n = \int_0^1 1\,dx - \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 x^2\,dx + \cdots$$
$$+ \int_0^1 (-x)^n\,dx.$$

$$v_n = \int_0^1 \left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n\right)dx$$

$$v_n = \int_0^1 S_n(x)\,dx$$

$$v_n = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{n+1}}{1+x}\right)dx$$

$$v_n = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 - (-1)^{n+1}\cdot\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$$

$$v_n = \ln 2 + (-1)^{n+1}\cdot\left((n+1)u_n - \ln 2\right)$$

D'où $\ln 2 - v_n = (-1)^{n+1}\left(\ln 2 - (n+1)u_n\right)$.

pour $n \in \mathbb{N}$.

c/ $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln 2 - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\left[\ln 2 - (n+1)u_n\right]$

$= 0$

car $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)u_n = \ln 2$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\ln 2$.