Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°30 4éme Math	Prof:M.Benali

<u>*Exercice 1*:</u>

Répondre par vraie ou faux en justifiant votre réponse .

1) $5^{4022} + 5^{2010} + 1 \equiv 0 \pmod{31}$.

2) *L'équation* $x^2+x+1 \equiv 0 \pmod 7$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

3) Soit x et y deux entiers tels que $x \equiv 4 \pmod 6$ et $y \equiv 5 \pmod 6$ alors le reste modulo 6 de $3x^2+y$ est égal à 5.

<u>*Exercice 2*:</u>

1) *a)* *Soit* $n \in \mathbb{N}$. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n les restes modulo 13 de 5^n.

b) *En* déduire que $1981^{1981} - 5$ *est* divisible par 13.

c) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

2) *Vérifier* que $7^2 \equiv -1 \pmod{10}$ .Quel est le chiffre des unités du nombre $A = 1+7+7^2+7^3 + \dots + 7^{40}$?

3) *Montrer* que $2^{70} + 3^{70}$ *est divisible par* 13.

<u>*Exercice 3*:</u>

1) *Montrer* par récurence sur l'entier naturel n , que $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ *est* divisible par 11.

2) Déterminer le reste modulo 5 de $(2917)^{541}$.

3) *a)* *En remarquant* que $999 = 27 \times 37$; montrer que pour tout entier naturel n on a: $10^{3n} \equiv 1 \pmod{37}$.

b) En déduire le reste modulo 37 de $N = 10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$.

4) *Montrer* que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{4n} - 3^n \equiv 0 \pmod{13}$.

<u>*Exercice 4*:</u>

1) *a)* *Soit* $n \in \mathbb{N}$. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n les restes modulo 7 de 5^n.

b) *Soit* $A = 13 \times 5^{54} + 19 \times 5^{104} + 23 \times 5^{418}$ .Déterminer le reste modulo 7 de A.

2) Montrer que pour tout entier naturel n; $5^{6n+5} + 2^{3n+2}$ est divisible par 7.

3) Re*soudre* dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 - 7x + 4 \equiv 0 \pmod 6$.

<u>*Exercice 5*:</u>

1) *a)* *Soit* $n \in \mathbb{N}$. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n les restes modulo 5 de 7^n.

b) *En* déduire le reste modulo 5 de $A = 2 \times 7^{400} - 3 \times 7^{450}$.

2) Montrer que pour tout entier naturel non nul n; $16 \times 7^{4n+2} - 28 \times 49^{2n} - 1$ est divisible par 5.

3) *Déter*min*er* les entiers naturels n tels que : $7^{4n} + 7^n \equiv 0 \pmod 5$.

<u>*Exercice 6*:</u>

1) Re*soudre* dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a) $x^2 - 5x + 4 \equiv 0 \pmod 5$.

b) $2x \equiv 3 \pmod 5$

2) a) Re*soudre* dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E): $x^3 \equiv 1 \pmod 7$.

b) Soit a un entier tel que $a \equiv 1 \pmod{14}$. a est-il une solution de (E)?

Série 30 – Arithmétique

Ex 1

1/

	5	5^2	5^3
Reste mod 31	5	25	1

Si $n \equiv 0 \pmod 3$ alors $5^n \equiv 1 \pmod{31}$
" $n \equiv 1 \pmod 3$ " $5^n \equiv 5 \pmod{31}$
" $n \equiv 2 \pmod 3$ " $5^n \equiv 25 \pmod{31}$

Comme $4022 \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow 5^{4022} \equiv 25 \pmod{31}$
$2010 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 5^{2010} \equiv 1 \pmod{31}$

d'où $5^{4022} + 5^{2010} + 1 \equiv 27 \pmod{31}$. Fausse

2/

Reste modulo 7 de n	0	1	2	3	4	5	6
" " " n^2	0	1	4	2	2	4	1
" " " n^2+n+1	1	3	0	6	0	3	1

$S_{\mathbb{Z}} = \{7q+2 \,;\, 7q'+4 \mid q \in \mathbb{Z} \text{ et } q' \in \mathbb{Z}\}$.

Fausse

3/ $x \equiv 4 \pmod 6$ et $y \equiv 5 \pmod 6$

alors $3x^2 + y \equiv 3.16 + 5 \pmod 6$
$\equiv 5 \pmod 6$ Vrai

Ex 2

1/

	5	5^2	5^3	5^4
Reste mod 13	5	12	8	1

Si $n \equiv 0 \pmod 4$ alors $5^n \equiv 1 \pmod{13}$
" $n \equiv 1 \pmod 4$ " $5^n \equiv 5 \pmod{13}$
" $n \equiv 2 \pmod 4$ " $5^n \equiv 12 \pmod{13}$
" $n \equiv 3 \pmod 4$ " $5^n \equiv 8 \pmod{13}$

b/ $1981 \equiv 5 \pmod{13}$

donc $1981^{1981} \equiv 5^{1981} \pmod{13}$

or $1981 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 5^{1981} \equiv 5 \pmod{13}$

d'où $1981^{1981} - 5 \equiv 0 \pmod{13}$.

ainsi $(1981^{1981} - 5)$ est divisible par 13.

c/ On a $31 \equiv 5 \pmod{13}$

$\Rightarrow 31^{4n+1} \equiv 5^{4n+1} \pmod{13}$
$\equiv 5 \pmod{13}$.

et $18 \equiv 5 \pmod{13}$

$\Rightarrow 18^{4n-1} \equiv 5^{4n-1}$ (mod
$\equiv 8$ (m

2/ $7^2 = 49$
$= 5.10 - 1.$

d'où $7^2 \equiv -1 \pmod{10}$.

$A = \sum_{k=0}^{40} 7^k$

$= \left[\sum_{k=0}^{9} 7^{4k}\left(7^0 + 7^1 + 7^2 + 7^3\right)\right] + 7^{40}.$

or $7^0 \equiv 1 \pmod{10}$
$7^2 \equiv -1 \pmod{10}$
$7^1 \equiv 7 \pmod{10}$
$7^3 \equiv -7 \pmod{10}$
$\Big\}\ 7^0 + 7^1 + 7^2 + 7^3 \equiv 0$ (mod

et $7^2 \equiv -1 \pmod{10}$
$\Rightarrow 7^4 \equiv 1 \pmod{10}$
$7^{40} \equiv 1 \pmod{10}$

d'où $\sum_{k=0}^{9} 7^{4k}.\left[7^0 + 7^1 + 7^2 + 7^3\right] \equiv 0$ (m

$A \equiv 1 \pmod{10}$.

Le chiffres d'unités de A est 1.

3/ On a $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ $\Big\}$ $2^2 \equiv -3^2 \pmod{13}$.
d'où $(2^2)^{35} \equiv (-3^2)^{35}$ (m
" $2^{70} \equiv -3^{70} \pmod{13}$
" $2^{70} + 3^{70} \equiv 0 \pmod{13}$

$\Rightarrow 2^{70} + 3^{70}$ est divisible par 13.

Ex 3

1/ pour $n = 0$, $3^3 - 4^2 = 27 - 16$
$= 11.$

$\Rightarrow 3^3 - 4^2$ est divisible par 11.

pour $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $3^{n+3} - 4^{4n+2} \equiv 0$ (mod

Mq $3^{n+4} - 4^{4n+6} \equiv 0 \pmod{11}$.

On a $3^{n+4} - 4^{4n+6} - 3^{n+3} + 4^{4n+2} =$

$-3^{n+3}(1-3) + 4^{4n+2}.(1-4^4) =$

$2.3^{n+3} + 4^{4n+2}.255 =$

$2\left(3^{n+3} + 4^{4n+2}\right) + 253.4^{4n+2} =$

$2.\ 11q + 11 \times 23.4^{4n+2} =\ ; q \in \mathbb{Z}$

$11\left[2q + 23.4^{4n+2}\right]\ ;\ q \in \mathbb{Z}.$

d'où $3^{n+4} - 4^{4n+6} \equiv 3^{n+3} - 4^{4n+2} \pmod{11}$
$\equiv 0 \pmod{11}$

... principe de raisonn...

... tout $n \in \mathbb{N}$, 3^{n+3} ...

2/ On a : $2917 \equiv 2 \pmod 5$

$(2917)^{541} \equiv 2^{541} \pmod 5$.

Or 5 est un nombre premier qui ne divise pas 2. D'après le petit théorème de Fermat,

$2^4 \equiv 1 \pmod 5$.

$\iff (2^4)^{135} \equiv 1 \pmod 5$

ssi $2^{540} \equiv 1 \pmod 5$

" $2^{541} \equiv 2 \pmod 5$

d'où $2917^{541} \equiv 2 \pmod 5$.

3/a/ On a $999 = 27 \times 37$

donc $999 \equiv 0 \pmod{37}$

" $10^3 \equiv 1 \pmod{37}$

" $10^{3n} \equiv 1 \pmod{37}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b/ On a $\left.\begin{array}{l} 10^9 \equiv 1 \pmod{37} \\ 10 \equiv 10 \pmod{37} \end{array}\right\} 10^{10} \equiv 10 \pmod{37}$

$\left.\begin{array}{l} 10^{18} \equiv 1 \pmod{37} \\ 10^2 \equiv 26 \pmod{37} \end{array}\right\} 10^{20} \equiv 26 \pmod{37}$

$10^{30} \equiv 1 \pmod{37}$

et ~~d'où~~ $N = 10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$

d'où $N \equiv 10 + 26 + 1 \pmod{37}$

$\equiv 0 \pmod{37}$.

4/ On a $2^4 = 16$

$= 13 \times 1 + 3$.

donc $2^4 \equiv 3 \pmod{13}$.

" $2^{4n} \equiv 3^n \pmod{13}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ex 4/

1/a/

	5	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6
Reste mod 7	5	4	6	2	3	1

Si $n \equiv 0 \pmod 6$ alors $5^n \equiv 1 \pmod 7$

" $n \equiv 1 \pmod 6$ " $5^n \equiv 5 \pmod 7$

" $n \equiv 2 \pmod 6$ " $5^n \equiv 4 \pmod 7$

" $n \equiv 3 \pmod 6$ " $5^n \equiv 6 \pmod 7$

" $n \equiv 4 \pmod 6$ " $5^n \equiv 2 \pmod 7$

" $n \equiv 5 \pmod 6$ " $5^n \equiv 3 \pmod 7$.

b/ Soit $A = 13 \cdot 5^{54} + 19 \times$

On a $54 \equiv 0 \pmod 6$ donc $5^{54} \equiv 1$ (

" $104 \equiv 2 \pmod 6$ " $5^{104} \equiv 4$ (

" $418 \equiv 4 \pmod 6$ " $5^{418} \equiv 2$ (

or $13 \equiv -1 \pmod 7$

$19 \equiv -2 \pmod 7$

$23 \equiv 2 \pmod 7$

d'où $\underbrace{13 \times 5^{54} + 19 \times 5^{104} + 23 \times 5^{418}}_{A} \equiv -1 - 8 + 4$

$\equiv 2 \pmod 7$

2/ On a $2^3 \equiv 8 \pmod 7$

$2^3 \equiv 1 \pmod 7$

donc $2^{3n} \equiv 1 \pmod 7$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

or $5^{6n} \equiv 1 \pmod 7$

d'où $5^{6n} \equiv 2^{3n} \pmod 7$. (1)

or $5^5 \equiv 3 \pmod 7$

$5^5 \equiv -4 \pmod 7$

$5^5 \equiv -2^2 \pmod 7$ (2)

(1)×(2) : $5^{6n} \times 5^5 \equiv 2^{3n} \times (-2^2) \pmod 7$

$5^{6n+5} \equiv -2^{3n+2} \pmod 7$.

$5^{6n+5} + 2^{3n+2} \equiv 0 \pmod 7$

d'où $5^{6n+5} + 2^{3n+2}$ est divisible par 7.

3/

Reste mod 6 de x.	0	1	2	3	4	5
" " " x^2	0	1	4	3	4	1
" " " $7x$	0	1	2	3	4	5
" " " $x^2 - 7x + 4$	4	4	0	4	4	0

$S_{\mathbb{Z}} = \{ 6q+2 \text{ et } 6q+5 \; ; \; q \in \mathbb{Z} \}$.

Ex 5

1/a/

	7	7^2	7^3	7^4
Reste modulo 5	2	4	3	1

Si $n \equiv 0 \pmod 4$ alors $7^n \equiv 1 \pmod 5$
" $n \equiv 1 \pmod 4$ " $7^n \equiv 2 \pmod 5$
" $n \equiv 2 \pmod 4$ " $7^n \equiv 4 \pmod 5$
" $n \equiv 3 \pmod 4$ " $7^n \equiv 3 \pmod 5$.

b/ Soit $A = 2 \cdot 7^{400} - 3 \cdot 7^{450}$

Comme $400 \equiv 0 \pmod 4$ alors $7^{400} \equiv 1 \pmod 5$
" $450 \equiv 2 \pmod 4$ " $7^{450} \equiv 4 \pmod 5$.

d'où $A \equiv 2 \times 1 - 3 \times 4 \pmod 5$

$A \equiv 0 \pmod 5$; $0 \in \{0,1,2,3,4\}$.

donc le reste modulo 5 de A est 0.

2/ On a $16 \times 7^{4n+2} \equiv 16 \times 4 \pmod 5$
$\equiv 4 \pmod 5$.

$28 \times 49^{2n} \equiv 4 \times 7^{4n+1} \pmod 5$
$\equiv 4 \times 2 \pmod 5$
$\equiv 3 \pmod 5$.

d'où $16 \cdot 7^{4n+2} - 28 \cdot 49^{2n} - 1 \equiv 4 - 3 - 1 \pmod 5$
$\equiv 0 \pmod 5$

donc ce nombre est divisible par 5, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

3/

	$n \equiv 0 \pmod 4$, $4n \equiv 0 \pmod 4$	$n \equiv 1 \pmod 4$, $4n \equiv 0 \pmod 4$	$n \equiv 2 \pmod 4$, $4n \equiv 0 \pmod 4$	$n \equiv 3 \pmod 4$, $4n \equiv 0 \pmod 4$
reste de 7^n modulo 5	1	2	4	3
reste de 7^{4n} modulo 5	1	1	1	1
reste de $7^{4n}+7^n$ mod 5	2	3	0	4.

d'où $n = 4q+$

Autre méthode :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4n \equiv 0 \pmod 4$.
d'où $7^{4n} \equiv 1 \pmod n$.

* $7^{4n} + 7^n \equiv 0 \pmod 5$
ssi $7^n \equiv -7^{4n} \pmod 5$
" $\equiv -1 \pmod 5$
" $\equiv 4 \pmod 5$.

D'où $n \equiv 2 \pmod 4$ (D'après la question 1/a)
" $n = 4q+2$, $q \in \mathbb{Z}$.

Ex 6

1/a/

Reste mod 5 de x	0	1	2	3	4
" " " x^2	0	1	4	4	1
" " " $5x$	0	0	0	0	0
" " " x^2-5x+4	4	0	3	3	0

$S_{\mathbb{Z}} = \{5q+1 \text{ et } 5q'+4 \; ; \; q \in \mathbb{Z} \; ; \; q' \in \mathbb{Z}\}$

b/

Reste modulo 5 de x	0	1	2	3	4
" " " $2x$	0	2	4	1	3

$S_{\mathbb{Z}} = \{5q+4, q \in \mathbb{Z}\}$.

2/a/

Reste mod 7 de X	0	1	2	3	4	5	6
" " " X^3	0	1	1	6	1	6	6

$S_{\mathbb{Z}} = \{7q+1, 7q+4 \; ; \; q \in \mathbb{Z}\}$.

b/ Soit a / $a \equiv 1 \pmod{14}$.
ssi $a - 1 = 14 \cdot K$, $K \in \mathbb{Z}$.
" $a - 1 = 7 \cdot 2K$, $2K \in \mathbb{Z}$.
" $a \equiv 1 \pmod 7$.
" $a^3 \equiv 1 \pmod 7$.

donc a solution de (E).