Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°29 4éme Math	Prof:M.Benali

Exercice 1:

Indiquer la bonne réponse pour chacune des questions suivantes :

1)Soit $x = 11^{2019}$

$a)x \equiv 1(\bmod 4)$ $\quad b)x \equiv 0(\bmod 4)$ $\quad \boxed{c)x \equiv -1(\bmod 4)}$

2)*Le quotient de* 2019 *par* -47 *est* :

$a)q = 45$ $\quad b)x = 42$ $\quad \boxed{c)x = -42}$

3)*Le reste modulo* 10 *de* $7\times 3^{28} + 8\times 3^{18}$ *est* :

$a)r = 0$ $\quad b)r = 1$ $\quad \boxed{c)r = 9}$

4)*Si* $x^2 - x \equiv -1(\bmod 3)$ *alors*:

$a)x \equiv 0(\bmod 3)$ $\quad b)x \equiv 1(\bmod 3)$ $\quad \boxed{c)x \equiv 2(\bmod 3)}$

$3^{18}[7.3^{10}+8]$

$3^{18}[7\,3^{10}$

$x(x-1) \equiv -1(3)$

$y \quad y-1$

Exercice 2:

Répondre par vraie ou faux en justifiant votre réponse:

√1)$659^{23} + 659^{22} \equiv 16(\bmod 23)$. $(659)^{22}[659+1] \equiv 16(\bmod 23)$ } Vraie.

√2)*L'entier* $14 - 29^{2019}$ *est divisible par* 15. → 16 → Théorème de Fermat

$14+1 \equiv 15 (\bmod 15)$

F 3)*Soit a un entier . Si* $a \equiv 9(\bmod 10)$ *alors* $a^2 + a \equiv 1(\bmod 10)$ 0

F 4)*Soit a un entier . Si* $a \equiv 2(\bmod 14)$ *alors* $a \equiv 1(\bmod 7)$ 2

√5)*a et b deux entiers : si* $4a \equiv 10b(\bmod 5)$ *alors* $a \equiv 0(\bmod 5)$.

Exercice 3:

1)*Déterminer* suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste modulo 5 de 2^n.

2)En déduire le reste modulo 5 de $(2917)^{541}$ et $(2918)^{541}$.

3)Montrer que $(2916)^{541}+(2917)^{541}+(2918)^{541}+(2919)^{541}$ est divisible par 5.

4)a)Montrer que pour tout entier a et b . $a^5+b^5 \equiv 0(\bmod 5)$ éq à $a+b \equiv 0(\bmod 5)$.

b)En déduire les entiers x vérifiants $x^5 \equiv 8(\bmod 5)$

Exercice 4:

1)*Montrer que* pour tout $x \in \{2,3,4,5\}$ $x^6 \equiv 1(\bmod 7)$.

Déterminer alors le reste modulo 7de $(2019)^{2018}$.

2)On pose $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$: $n \in \mathbb{N}$.

a)Montrer que si n est impaire alors $A_n \equiv 0(\bmod 7)$.

b)Soit p le reste de la division euclidienne de n par 6. Montrer que $A_n \equiv A_p(\bmod 7)$.

c)En déduire l'ensemble des entiers naturels n pour les quels $A_n \equiv 0(\bmod 7)$.

3)*Soit* $B_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$.

Déterminer le reste modulo 7 de B_{2014} *et* B_{2015} .

Théorème de Fermat

Soit p un nombre premier qui ne divise pas a.

alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Petit Théorème de Fermat

p premier.

a un entier.

$a^p - a \equiv 0 \pmod{p}$.

$a^p \equiv a \pmod{p}$.

Série n° 29

Ex 1

1) On a $11 \equiv 3 \pmod 4$

$\equiv -1 \pmod 4$.

donc $11^{2019} \equiv (-1)^{2019} \pmod 4$.

ssi $x \equiv -1 \pmod 4$.

2) (Sur l'énoncé).

Ex 3

1) On pose r /

$2^n \equiv r \pmod 5$.

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
1	2	4	3	1

pour $n \equiv 1 \pmod 4$ ($4k+1$), $2^n \equiv 2 \pmod 5$

$n \equiv 2 \pmod 4$, $2^n \equiv 4 \pmod 5$

$n \equiv 3 \pmod 4$, $2^n \equiv 3 \pmod 5$

$n \equiv 0 \pmod 4$, $2^n \equiv 1 \pmod 5$

2) On a : $2917 \equiv 2 \pmod 5$

$(2917)^{541} \equiv 2^{541} \pmod 5$

or $541 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 2^{541} \equiv 2 \pmod 5$

d'où $(2917)^{541} \equiv 2 \pmod 5$.

On a $2918 \equiv 3 \pmod 5$

$\equiv -2 \pmod 5$

$2918^{541} \equiv -2^{541} \pmod 5$

or $-2^{541} \equiv -2 \pmod 5$.

$\Rightarrow 2918^{541} \equiv -2 \pmod 5$

$\equiv 3 \pmod 5$.

3) On a $2916 \equiv 1 \pmod 5$

$(2916)^{541} \equiv 1 \pmod 5$

et $2919 \equiv -1 \pmod 5$

$(2919)^{541} \equiv -1$ (mod 5) …

$(2916)^{541} + (2917)^{541} + (2918)^{541} + (2919)^{541} \equiv 0$ …

4) a/ * Si $a+b \equiv 0 \pmod 5$

$a^5 \equiv (-b)^5 \pmod 5$

$a^5 \equiv -b^5 \pmod 5$

$\boxed{a^5 + b^5 \equiv 0 \pmod 5}$.

* Si $a^5 + b^5 \equiv 0 \pmod 5$

On a 5 premier.

D'après le petit théorème de Fermat.

$\left.\begin{array}{l} a^5 \equiv a \pmod 5 \\ b^5 \equiv b \pmod 5 \end{array}\right\}$ $a^5 + b^5 \equiv a+b$ (m…

$\boxed{a+b \equiv 0 \pmod 5}$.

$\Rightarrow a^5 + b^5 \equiv 0 \pmod 5$ équivaut à $a+b \equiv 0 \pmod 5$.

b/ $x^5 \equiv 8 \pmod 5$

$\equiv -32 \pmod 5$.

$\equiv -2^5 \pmod 5$

ssi $x^5 + 2^5 \equiv 0 \pmod 5$.

ssi $x + 2 \equiv 0 \pmod 5$.

$x \equiv 3 \pmod 5$.

$\Rightarrow x \in \{5k+3, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ex 4

1) Si $x = 2$, $2^6 \equiv 1 \pmod 7$.

" $x = 3$, $3^6 \equiv 1 \pmod 7$.

" $x = 4$, $4^6 \equiv 1 \pmod 7$.

" $x = 5$, $5^6 \equiv 1 \pmod 7$.

7 premier

$7 \nmid x$, $x \in \{2, 3,$ …

$\Rightarrow$ Thm Fermat

$x^6 \equiv 1$ (mo…

$(2019)^{2018} \equiv ? \pmod 7$

On a $(2019) \equiv 3 \pmod 7$

$(2019)^{2018} \equiv 3^{2018} \pmod 7$

or $3^{2016} \times 3^2 = 3^{6 \cdot 336} \times 3^2$

$(3^6)^{336} \equiv 1 \pmod 7$

$3^2 \equiv 2 \pmod 7$

$(2019)^{2018} \equiv 2 \pmod 7$.

2) a/ Si n est impaire.

On a $5 \equiv -2 \pmod 7$

$5^n \equiv -2^n \pmod 7$

$5^n + 2^n \equiv 0 \pmod 7$.

de même $3^n + 4^n \equiv 0 \pmod 7$.

$\Rightarrow 5^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 0 \pmod 7$.

b/ Soit p le reste de la division Euclidienne de n par 6.

il existe alors un entier k tel que $n = 6k + p$, $p \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$

$= 2^{6k} \cdot 2^p + 3^{6k} \times 3^p + 4^{6k} \cdot 4^p + 5^{6k} \cdot 5^p$

or $2^{6k} \equiv 1 \pmod 7$.

$$\left.\begin{array}{l} 2^{6k} \cdot 2^p \equiv 2^p \pmod 7 \\ 3^{6k} \cdot 3^p \equiv 3^p \pmod 7 \\ 4^{6k} \cdot 4^p \equiv 4^p \pmod 7 \\ 5^{6k} \cdot 5^p \equiv 5^p \pmod 7 \end{array}\right\} A_n \equiv A_p \pmod 7.$$

c/ D'après a/, si n est impaire $A_n \equiv 0 \pmod 7$.

* Si n est pair, $p \in \{0, 2, 4\}$.

On a $A_n \equiv A_p \pmod 7$.

or $A_0 = 2^0 + 3^0 + 4^0 + 5^0$

$= 4$

$\equiv 4 \pmod 7$.

$A_2 = 4 + 9 + 16 + 25 = 54$.

$\equiv 5 \pmod 7$

$A_4 = 16 + 81 + 256 + 625 = 978$

$\equiv 5 \pmod 7$.

donc $A_n \equiv 0$ (mod) que si n est impaire

$n \in \{2k, k \in \mathbb{Z}\}$.