Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°28 4éme Math	Prof:M.Ben

Exercice 1:

I / Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ *par* $\begin{cases} f(x)=(1+x)Ln(1+x)-x & \text{si } x \succ -1. \\ f(-1)=1 \end{cases}$

1)a)*Etudier* la continuité et la dérivabilité de f à droite en -1.

b)Dresser le tableau de variation de f.

c)Tracer C_f dans un R.O.N$(O,\vec{i},\vec{j})$ On prendra $\|\vec{i}\|=2cm.$

2)*Soit* $\lambda\in]-1,0[$;on désigne par A(λ) l'aire en cm² de la partie du plan limitée par la courbe et les droites d'équations x=0 ; x=λ et y=-x.

Calculer A(λ) en fonction de λ puis déterminer $\lim\limits_{\lambda\to(-1)^+} A(\lambda)$.

II / Soit g *la* fonction définie sur $[-1,0]$ par $\begin{cases} g(x)=\dfrac{x}{Ln(1+x)} & \text{si } -1\prec x\prec 0 \\ g(-1)=0 \text{ et } g(0)=1 \end{cases}$

1)a)Montrer que g est continue sur $[-1,0]$.

b)*Etudier* la dérivabilité de g a droite en -1.Interpreter le résultat obtenu.

2)a)*Montrer* que pour tout $x\in]-1,0]$; $0\le\int_x^0\dfrac{t^2}{1+t}dt\le\dfrac{-x^3}{3(1+x)}$.

b)En déduire que pour tout $x\in]-1,0]$; $\dfrac{x^2}{2}\le x-Ln(1+x)\le\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3(1+x)}$.

c)Montrer que g est dérivable à gauche en 0 et que $g'_g(0)=\dfrac{1}{2}$.

3)a)Montrer que g'(x) et de meme signe que f(x) sur]-1,0[.

b)Dresser le tableau de variation de g .

c)Tracer C_g dans un R.O.N$(O,\vec{u},\vec{v})$.

Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ *par* $\begin{cases} f(x)=xLnx-x & \text{si } x\succ 0. \\ f(0)=0 \end{cases}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un R.O.N$(O,\vec{i},\vec{j})$

1)a)*Etudier* la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

b)Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f .

2)a)*Soit* $\lambda\in]0,1]$;calculer l'aire A(λ) de la partie du plan limitée par la courbe C_f la droite Δ:y=-x et les droites d'équations x=λ et x=1.

b)En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f la droite Δet les d

d'équation

3)Soit la suite (I_n) définie par $I_n = \int_1^e x(Lnx)^n\,dx$ pour tout entier $n \geq 1$.

a)Montrer que la suite (I_n) est décroissante en déduire qu'elle est convergente.

b)A l'aide d'une integration par parties montrer que pour tout entier $n \geq 1$;

$2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$

c)En déduire que pour tout entier $n \geq 1$; $\dfrac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+1}$.

d)Déterminer alors la limite de (I_n) .

<u>*Exercice 3*</u>:

1)*a)En* appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis, montrer que

pour tout $x \geq 1$: $\dfrac{x-1}{x} \leq Lnx \leq x-1$

b)Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $\dfrac{x-1}{x} \leq Lnx \leq x-1$.

c)En déduire que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\dfrac{x-1}{x} \leq Lnx \leq x-1$

et que pour tout $x \in]0,1[$, $Ln(1+x) \leq x \leq -Ln(1-x)$

2)*Soit* $(U_n)_{n\in IN^*}$ la suite définie par $U_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n+k}$

a)Montrer que pour tout $n \in IN^* \{1\}$, $Ln(2+\dfrac{1}{n}) \leq U_n \leq Ln(2+\dfrac{2}{n-1})$.

b)En déduire que la suite $(U_n)_{n\in IN^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

<u>***Prof:M.BenAli***</u>

$\left((1+x)\ln(1+x) - (1+x)\right)'$

$= \ln(1+x) + \dfrac{(1+x)}{1+x} - 1$

$= \ln(1+x).$

Série 28

Ex 1

1) $f : [-1,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} (1+x)\ln(1+x) - x & \text{si } x > -1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

1) a/ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (1+x)\ln(1+x) - x.$

On a $\lim\limits_{x\to -1^+} 1+x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln x = 0$ $\Big\}$ $\lim\limits_{x\to -1^+} (1+x).\ln(1+x) = 0.$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1 = f(-1).$

donc f est continue à droite en -1.

* $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{(1+x)\ln(1+x) - x - 1}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to -1^+} \ln(1+x) - 1.$

or $\lim\limits_{x\to -1^+} 1+x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ $\Big\}$ $\lim\limits_{x\to -1^+} \ln(1+x) = -\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\infty.$

b/ f est dérivable sur $]-1,+\infty[$.

pour $x > -1$; $f'(x) = \ln(1+x) + \dfrac{1+x}{1+x} - 1$

$f'(x) = \ln(1+x) + \cancel{1-1}.$

$= \ln(1+x).$ pour $x > -1$.

$\ln(1+x) < 0$ ssi $1+x < 1$

$-1 < x < 0.$

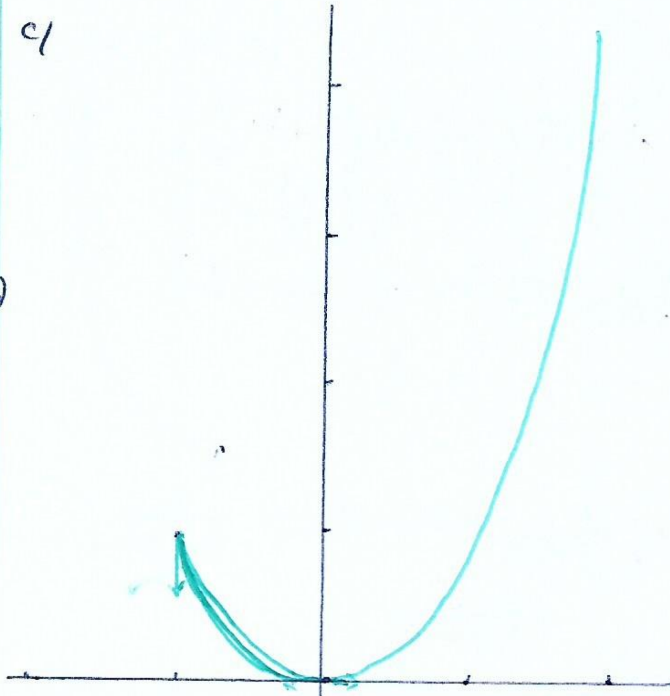
x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (1+x)\ln(1+x) - x$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(1+x) + x\left(\ln(1+x) - 1\right).$

$= +\infty.$

c/



~~2/ Soit $\lambda \in]-1,0[$.~~

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1+x}{x}\right).\ln(1+x) - 1$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}+1\right)\ln(1+x) - 1$

$= +\infty$

2/ Soit $\lambda \in]-1,0[$.

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^\lambda |f(x) + x|\, dx$

$= \displaystyle\int_\lambda^0 -(1+x)\ln(1+x)\, dx.$

On pose $u(x) = \ln(1+x)$, $u'(x) =$

$v'(x) = 1+x$, $v(x) = x +$

$\mathcal{A} = -\left[\left(x+\dfrac{x^2}{2}\right)\ln(1+x)\right]_\lambda^0 + \displaystyle\int_\lambda^0 \dfrac{2x+}{2(1+}$

$= +\left(\lambda+\dfrac{\lambda^2}{2}\right)\ln(1+\lambda) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int^0$

$^2)\ln(1+\lambda) + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x}{2}\right.$

II/ Soit $g : [-1,0] \longrightarrow \mathbb{R}$

$g \qquad x \longmapsto g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]-1,0[\\ 0 & \text{si } x = -1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$\mathcal{A}(\lambda) = \ln(1+\lambda)\left(\frac{1}{2}+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}\right)$
$-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^2}{2}+\lambda\right).$

$\lim\limits_{x \to -1^+} \mathcal{A}(\lambda) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right).$

$= \frac{1}{\cancel{4}} \cdot 1.$

1) a/ $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{\ln(1+x)}$

$= \lim\limits_{x \to \cancel{-}1^+}$

Série n°28

II/ $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } -1 < x < 0 \\ g(-1) = 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

1) a/ La fonction $x \mapsto (1+x)$ est strictement positive et continue sur $]-1,0[$.

D'où " " $x \mapsto \ln(1+x)$ continue sur $]-1,0[$.

" " " $x \mapsto \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ continue sur $]-1,0[$.

* $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x}{\ln(1+x)}$

$= 0 = g(-1)$

* $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

$= 1 = g(0)$.

Donc g est continue sur $[-1,0]$.

b/ $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\frac{x}{\ln(1+x)}}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x}{(x+1)\ln(1+x)}$

On pose $X = x+1$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} X = 0^+$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}$

$= \lim\limits_{X\to 0^+} \dfrac{X-1}{X\ln X}$

$= +\infty$.

Car $\lim\limits_{X\to 0^+} X\ln X = 0^-$.

C_g admet une demi t[...]

dirigée vers le haut [...]

2/a/ pour tout $x \in]-1,0]$

et pour $-1 < x \leq t \leq 0$

$0 < 1+x \leq 1+t \leq 1$

$1 \leq \dfrac{1}{1+t} \leq \dfrac{1}{1+x}$; $t^2 \geq 0$.

$0 \leq t^2 \leq \dfrac{t^2}{1+t} \leq \dfrac{t^2}{1+x}$ et $x \leq 0$.

$0 \leq \displaystyle\int_x^0 t^2\,dt \leq \int_x^0 \frac{t^2}{1+t}\,dt \leq \int_x^0 \frac{t^2}{1+x}\,dt$

$0 \leq \displaystyle\int_x^0 \frac{t^2}{1+t}\,dt \leq \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{3}\cdot[$

$0 \leq \displaystyle\int_x^0 \frac{t^2}{1+t}\,dt \leq \frac{-x^3}{3(1+x)}$.

b/ pour tout $x \in]-1,0]$,

On a $0 \leq \displaystyle\int_x^0 \frac{t^2}{1+t}\,dt \leq \frac{-x^3}{3(1+x)}$

$0 \leq \displaystyle\int_x^0 \left(\frac{t^2-1}{1+t} + \frac{1}{1+t}\right)dt \leq \frac{-x^3}{3(1+x)}$

$0 \leq \displaystyle\int_x^0 \left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt \leq \frac{-x^3}{3(1+x)}$

$0 \leq \left[\dfrac{t^2}{2} - t + \ln(1+t)\right]_x^0 \leq \dfrac{-x^3}{3(1+x)}$

$0 \leq \dfrac{-x^2}{2} + x - \ln(1+x) \leq \dfrac{-x^3}{3(1+x)}$

$\dfrac{x^2}{2} \leq x - \ln(1+x) \leq \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3(}$

c/ $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\frac{x}{\ln(1+x)} - 1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

or pour $x \in]-1,0]$, $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leq \dfrac{1}{2} -$

$\dfrac{x}{(1+x)} = \dfrac{1}{2}$.

D'où $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}}{\dfrac{\ln(1+x)}{x}} = \dfrac{1}{2}$.

Donc g est dérivable à gauche en 0 et $g'_g(0) = \frac{1}{2}$.

3/a/ g est dérivable sur $]-1, 0[$ et on a :

$$g'(x) = \frac{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}}{(\ln(1+x))^2}$$

$$= \frac{(1+x)\ln(1+x) - x}{(x+1)(\ln(1+x))^2}$$

$$= \frac{f(x)}{(x+1)\ln^2(x+1)}$$

pour tout $x \in]-1, 0[$, $x+1 > 0$.

$\ln^2(x+1) > 0$.

donc g' et f sont de même signe sur $]-1, 0[$

b/

x	-1		0
$g'(x)$	‖	$+$	
g	0	$\nearrow$	1