Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°21 4éme Math	Prof:M.Benali

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ et que $f'(x)=\dfrac{-\ln x-2}{x^2(\ln x)^3}$.

   b. Dresser le tableau de variation de f.

   c. Tracer C_f.

2. Soit α et β deux réels tels que $1<\alpha<\beta$. On désigne par :

$\mathcal{A}_1$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=\beta$.

$\mathcal{A}_2$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\dfrac{1}{\beta}$ et $x=\dfrac{1}{\alpha}$.

   a. Comparer $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.

   b. Hachurée les parties correspondantes à $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ lorsque $\alpha=2$ et $\beta=e^2$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} f(x)=x^2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

(C) désigne la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) On pose pour $x>0$ $g(x)=x^2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)-x+\dfrac{1}{2}$.

a) Vérifier que $g(x)=x^2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{1+t}-1+t\right)dt$.

b) Montrer que pour tout $t\geq 0$ on a : $0\leq\dfrac{1}{1+t}-1+t\leq t^2$.

c) En déduire que $x-\dfrac{1}{2}\leq f(x)\leq x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3x}$ pour tout $x>0$.

d) Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et prouver que la droite $D: y=x-\dfrac{1}{2}$ est une asymptote à (C). $1+\frac{1}{x}$

2)a) Montrer que $\forall x>0$; $2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)>\dfrac{1}{x+1}$.Déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer (C).

3)a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même $(O,\vec{i},\vec{j})$

4) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$.

a) Montrer que h est continue à droite en 0.

b) Montrer que $\forall x>0$; $h(x)=\dfrac{1}{3}\left((x^3+1)\ln(x+1)-x^3\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{1}{2}-2\ln 2\right)$.

c) En déduire la valeur de $J=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.

d) Calculer alors l'aire de la ré[...] ...es droites d'équations respectives : $x=1$ et $y=1$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0.$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^n . \ln^p x = 0.$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln^p x}{x^n} = 0.$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} . \ln x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0.$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{+\infty} e^x = +$

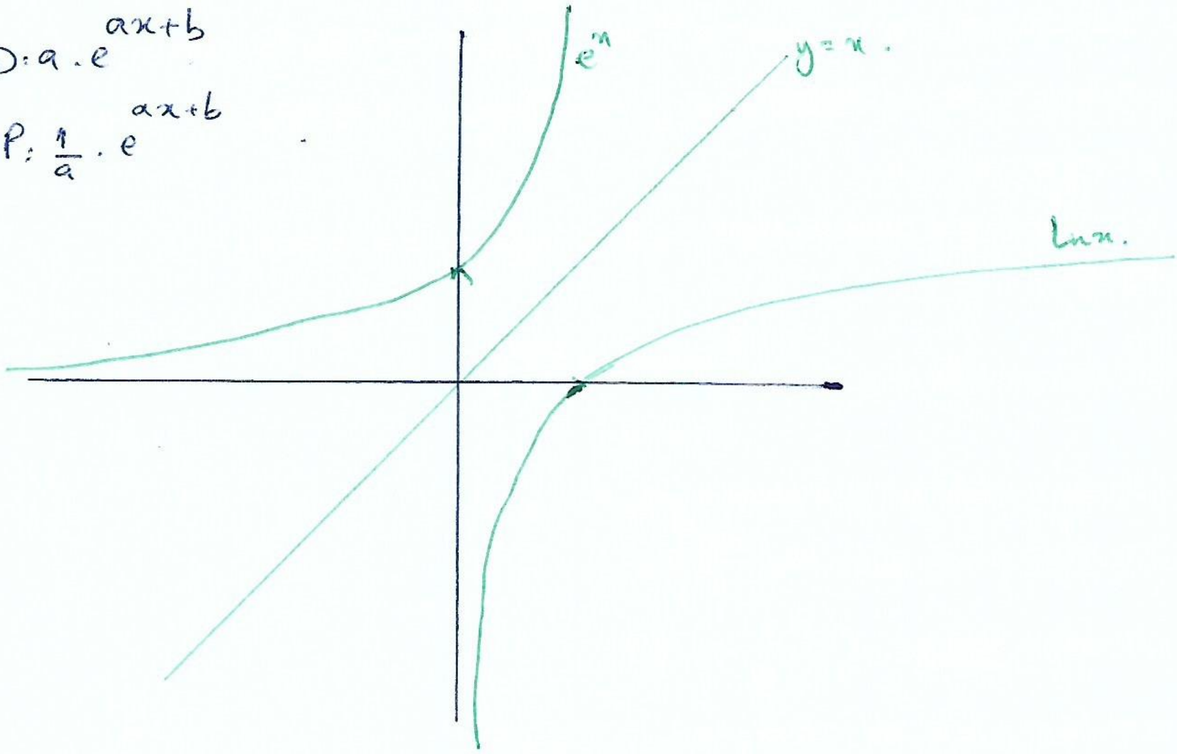
$\lim\limits_{x \to -\infty} x . e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^p . e^{nx} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{nx}}{x^p}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x}$

e^{ax+b} → $D : a . e^{ax+b}$

e^{ax+b} → $P : \frac{1}{a} . e^{ax+b}$



$\frac{U'}{U} \longrightarrow \cancel{P : \ln}$ $\ln(|U|).$

$U' . e^U \longrightarrow P : e^U.$

Série 27

Ex 1)

$f : D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln^2(x)}$

1) a/ La fonction $x \mapsto x$ dérivable sur D_f

La fonction $x \mapsto \ln x$ dérivable sur D_f et strictement >0.

" " $x \mapsto (\ln^2 x).x$ dérivable sur D_f et $\neq 0$.

D'où f est dérivable sur D_f.

Pour $x > 0$ et $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{-(\ln^2 x + \cancel{x} \, 2 . \ln x \times \frac{1}{\cancel{x}})}{x^2 . \ln^4 x}$$

$$= \frac{-\ln x - 2}{x^2 \ln^3 x}$$

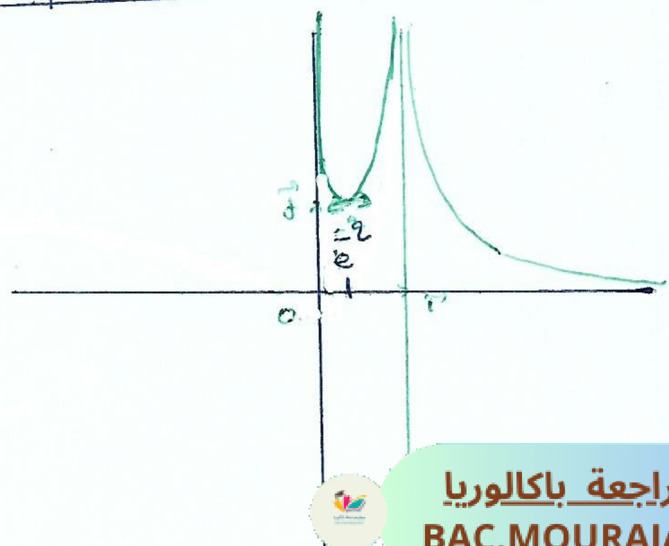
b/ $-\ln x - 2 = 0$

ssi $\ln x = -2$.

$x = e^{-2} \simeq 0,135$.

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$-\ln x - 2$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
$\ln^3 x$	||	$-$		$-$	||	$+$	
$f'(x)$	||	$-$		$+$	||	$-$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$e^2/4$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

c/



2/ $1 < \alpha < \beta$; $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

a) $1 < \alpha < \beta$

donc

$1 > \dfrac{1}{\alpha} > \dfrac{1}{\beta} > 0$.

a) $A_1 = \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x}\,dx = \Big[\frac{-1}{\ln x}\Big]$

$= \dfrac{-1}{\ln \beta} + \dfrac{1}{\ln \alpha}$

$A_2 = \displaystyle\int_{\frac{1}{\beta}}^{1/\alpha} f(x)\,dx$.

$A_2 = \Big[\dfrac{-1}{\ln x}\Big]_{1/\beta}^{1/\alpha}$

$A_2 = \dfrac{-1}{\ln \frac{1}{\alpha}} + \dfrac{1}{\ln \frac{1}{\beta}} = \dfrac{1}{\ln \alpha} - \dfrac{1}{\ln \beta}$

$A_2 = A_1$

Ex 2)

$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) a/ Pour $x > 0$, on pose : $g(x) = x^2 . \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - x$

* $\displaystyle\int_0^{1/x} \left(\frac{1}{1+t} - 1 + t\right) dt = \Big[\ln(t+1) - t + \frac{1}{2}t^2\Big]_0^{1/x}$

$= \ln\left(\dfrac{1}{x} + 1\right) - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^2}$

* $x^2 . \displaystyle\int_0^{1/x} \left(\frac{1}{1+t} - 1 + t\right) dt$

$= x^2 . \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - x + \dfrac{1}{2}$.

$= g(x)$.

b/ pour $t \geq 0$,

$1 + t \geq 1 > 0$.

$0 \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$

$\dfrac{1}{1+t} - 1 + t = \dfrac{\cancel{1} - \cancel{t} - \cancel{1} + \cancel{t} + t^2}{1+t}$

$= \dfrac{t^2}{1+t}$.

On a $0 \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$; $t^2 \geq 0$.

$\dfrac{t^2}{1+t} \leq t^2$,

c/ On a pour $t \geq 0$, $0 \leq \frac{1}{1+t} - 1 + t \leq t^2$.

Les fonctions étant continues, et $0 \leq \frac{1}{x}$ pour $x > 0$.

$$0 \leq \int_0^{1/x} \left(\frac{1}{1+t} - 1 + t\right) dt \leq \int_0^{1/x} t^2 dt$$

$$0 \leq g(x) \leq x^2 \cdot \left[\frac{1}{3} t^3\right]_0^{1/x}$$

$$0 \leq f(x) - x + \frac{1}{2} \leq \frac{x^2}{3x^3} - 0$$

$$x - \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{3x} + x - \frac{1}{2}.$$

d/ Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \frac{1}{2} = +\infty \Longrightarrow \left\} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\right.$

~~$\lim\limits_{x \to +\infty} x + \frac{1}{3x} - \frac{1}{2} = +\infty$~~

~~2/a/ pour tout $x > 0$, $2x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ ...~~

$$1 - \frac{1}{2x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{2x}$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

On a : $-\frac{1}{2} \leq f(x) - x \leq \frac{1}{3x} - \frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = -\frac{1}{2}$.

~~$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ ...~~

$\Longrightarrow$ $D : y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $(+\infty)$.

2/a/ ~~$\forall x > 0$, $2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 2\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.~~

~~$x+1 > 1$~~

~~$2\ln(x+1) - 2\ln(x) \in$~~

~~$x+1 > 1$~~

~~$2\ln(x+1) > 0$.~~

$$f'(x) = 2x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \left(\frac{-1}{\cancel{x^2}}\right) \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \cancel{x^2}.$$

$$f'(x) = 2x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{x}{x+1}$$

$$f'(x) = x\left(2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right).$$

Série 27

Ex 1

$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ si } x=0 \end{cases}$

C sa courbe représentative dans RON $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) On pose : $g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \cancel{x^2 \cdot \int_0^{1/x} \left(\frac{1}{1+t} - 1+t\right) dt}$

$x^2 \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - x + \frac{1}{2}$.

a/ On a . $x^2 \cdot \int_0^{1/x} \left(\frac{1}{1+t} - 1+t\right) dt$, pour $x>0$,

$= x^2 \cdot \left[\ln(1+t) - t + \frac{1}{2}t^2\right]_0^{1/x}$

$= x^2 \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)$

$= x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - x + \frac{1}{2}$.

D'où, pour $x>0$, $g(x) = x^2 \cdot \int_0^{1/x} \left(\frac{1}{1+t} - 1+t\right) dt$.

b/ pour $t \geq 0$, $\frac{1}{1+t} - 1 + t = \frac{1-1-t+t+t^2}{1+t}$

$= \frac{t^2}{1+t}$.

On a : $0 < 1 \leq 1+t$

donc $0 < \frac{1}{1+t} \leq 1$.

$0 \leq \frac{t^2}{1+t} \leq t^2$

$0 \leq \frac{1}{1+t} - 1 + t \leq t^2$

c/ pour $t \geq 0$, $0 \leq \frac{1}{1+t} - 1 + t \leq t^2$.

Les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t} - 1 + t$ sont continues sur $[0, \frac{1}{x}]$ pour tout $x>0$.

D'où $0 \leq \int_0^{1/x} \left(\frac{1}{1+t} - 1+t\right) dt \leq \int_0^{1/x} t^2\, dt$

$0 \leq x^2 \cdot \int_0^{1/x} \left(\frac{1}{1+t} - 1+t\right) \ldots$

$0 \leq g(x) \leq \frac{x^2}{3x^3}$

$0 \leq f(x) - x + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3x}$

$x - \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x} + x - \frac{1}{2}$. pour tout x

d/ * Comme $\lim_{x\to+\infty} x - \frac{1}{2} = +\infty$ et $f(x) \geq x - \frac{1}{2}$ $\Big\}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On a $x - \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x} + x - \frac{1}{2}$; $x>0$.

* $1 - \frac{1}{2x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x}$

Comme $\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{2x} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} = \ldots$

alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

* $0 \leq f(x) - x + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x}$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

alors $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = 0$.

D'où $D : y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $(+\infty)$.

2/ Pour tout $x>0$, On pose $k : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \ldots$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

" " $x \mapsto \frac{x+1}{x}$ " " et >0 sur $]0,+\infty[$

donc " $x \mapsto 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ " sur $]0,+\infty[$.

D'où k est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Pour $x>0$, $k'(x) = 2\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)\cdot\frac{x}{x+1} + \frac{1}{(1+x)^2}$

$= \frac{-2}{(x+1)x} + \frac{1}{(1+x)^2}$

$= \frac{-2(x+1) + x}{(x+1)^2 \times x}$

$= \frac{-x-2}{x\cdot(x+1)^2} < 0$.

x	0		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

$\varphi(]0,+\infty[) =]0,+\infty[$

Pour $x>0$, $\varphi(x) > 0$.

$\lim \frac{x+1}{x} = +\infty$ $\Big\}$ $\lim 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \ldots$

Par suite $K(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

sig $2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$; $x > 0$.

* Pour $x > 0$, f est dérivable et on a :

$$f'(x) = 2x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x^2 \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) \cdot \frac{x}{x+1}$$

$$= x\left(2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right).$$

$x > 0$ et On a $2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$

donc $2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0$.

D'où $f'(x) > 0$., $x > 0$.

Par suite f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*_+$.

b/ $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2 \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{x}$

$= \lim_{x\to0^+} x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Il faut vérifier la continuité de f à droite en 0.

On pose $y = \frac{1}{x}$.

$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y} \cdot \ln(1+y)$

$= \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(1+y)}{1+y} \cdot \frac{1+y}{y} = 0 = f'(0)$.

Car $\lim_{y\to+\infty} 1+y = +\infty$. $\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln Y}{Y} = 0$. $\Big\}$ $\lim_{Y\to+\infty} \frac{\ln(1+Y)}{1+Y} = 0$. et $\lim_{Y\to+\infty} \frac{1+Y}{Y} = 1$.

$\lim_{x\to0^+} x\ln(x+1) - x\ln(x) = 0$ → formule.

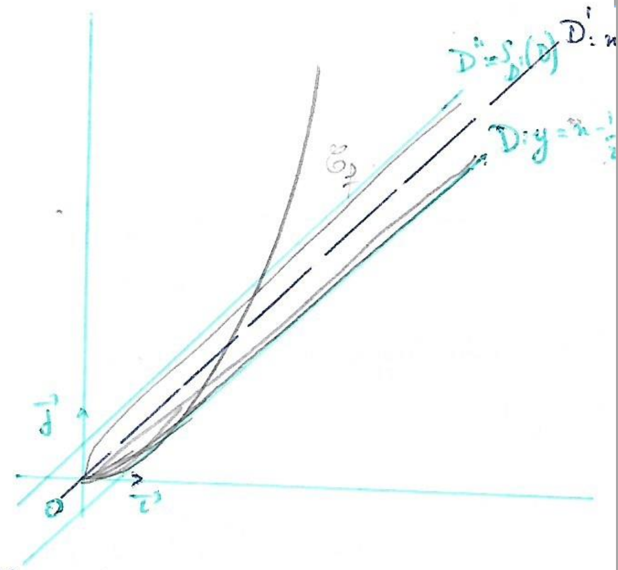
c/

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	0 $+$
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$

* ~~$\lim_{0^+} f = \lim_{x\to0^+} x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0 = f(0)$~~

$\neq 0$.

* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.



3/a/ f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers $f([0,+\infty[) = [f(0), \lim_{+\infty} f[$

$= [0,+\infty[$

$= J$.

b/ On pose $\Delta : y = x$.

$C' = S_\Delta(C)$.

4/a/ $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$.

On a $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x^2 \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

or $\lim_{x\to0^+} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = f'(0) = 0$. Should've done this before.

D'où $\lim_{0^+} f = 0 = f(0)$.

Ainsi f est continue sur $[0,+\infty[$.

h étant la primitive de f sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 1, est dérivable sur [0,

D'où elle y est continue. ✓

4) b/ pour $x>0$, On a :

$$h(x)=\int_1^x f(t)\,dt$$

$$=\int_1^x t^2\ln\left(\frac{1+t}{t}\right)dt$$

On pose $u(t)=\ln\left(\frac{1+t}{t}\right)$, $u'(t)=\frac{-t}{t^2(t+1)}$

$v'(t)=t^2$, $v(t)=\frac{1}{3}t^3$.

$$h(x)=\frac{1}{3}\cdot\left[t^3\ln\left(\frac{1+t}{t}\right)\right]_1^x+\frac{1}{3}\int_1^x\frac{t^2}{(t+1)}\,dt.$$

Or pour $t\in\,]0,+\infty[$:

$$\frac{t^2}{t+1}=\frac{(t+1)^2-2t-1}{t+1}=t+1-\frac{2(t+1)}{t+1}+\frac{1}{t+1}$$

$$=t-1+\frac{1}{t+1}.$$

d'où $\displaystyle\int_1^x\frac{t^2}{t+1}dt=\int_1^x\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2-t+\ln(t+1)\right]_1^x$$

$$=\frac{1}{2}x^2-x+\ln(x+1)-\frac{1}{2}+1-\ln(2).$$

$$h(x)=\frac{1}{3}\left(x^3\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)-\ln(2)+\int_1^x\frac{t^2}{t+1}dt\right)$$

$$=\frac{1}{3}\Big(x^3\ln(x+1)-x^3\ln(x)-\ln(2)+\frac{1}{2}x^2-x+\ln(x+1)+\frac{1}{2}-\ln(2)\Big)$$

$$=\frac{1}{3}\left((x^3+1)\ln(x+1)-x^3\ln(x)+\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}-2\ln(2)\right)$$

c/ $J=\int_0^1 f(t)\,dt=-h(0)=-\lim\limits_{x\to0^+}h(x)$

(car h est continue).

$$J=-\frac{1}{3}\left(\ln(1)+\frac{1}{2}-2\ln(2)\right)$$

$$J=-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot\ln(2).$$

d/ Par des raisons de symétries par rapport à $\Delta: y=x$, l'aire demandée est égale à 2 fois celle de la partie du plan limitée par (C), la droite $\Delta: y=x$, D...

$$\mathcal{A}=2\cdot\int_0^1|f(t)-t|\,dt$$

$$=2\cdot\left|\int_0^1 f(t)dt-\int_0^1 t\,dt\right|$$

$$=2\cdot\left|J-\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1\right|$$

$$=2\left|-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\ln(2)-\frac{1}{2}\right|$$

$$=2\left|\frac{-4}{6}+\frac{2}{3}\ln(2)\right|$$

$$=2\cdot\frac{2}{3}\left|-1+\ln(2)\right|.$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\left|\ln\frac{1}{e}+\ln 2\right|$$

$$=\frac{4}{3}\left|\ln\frac{2}{e}\right|.$$

$$=-\frac{4}{3}\cdot\ln\left(\frac{2}{e}\right)$$

aire du carré

$$\mathcal{A}=1-2\int_0^1 f(t)\,dt$$

$$=1-2J$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\cdot\ln 2\quad(\text{u.a})$$