Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°14 4éme Math	Prof:M.Benali

Exercice 1

Soit f définie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par $f(x)=\sqrt{\sin 2x}$.

1)Etudier la dérivabilité de f sur $[0,\frac{\pi}{4}]$.

2)Montrer que f est une bijection de $[0,\frac{\pi}{4}]$ sur $[0,1]$.

3)Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1} et expliciter $(f^{-1})'(x)$.

Exercice 2

Pour $x \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, on pose $f(x)=\tan(\pi x)$.

1)Montrer que f admet une fonction réciproque h définie sur $\mathbb{R}$.
2)Montrer que h est dérivable en 1 et calculer $h'(1)$.
3)Etudier la dérivabilité de h sur $\mathbb{R}$; puis déterminer $h'(x)$.

4)On pose, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\varphi(x)=h(\frac{1}{x})$.

a)Montrer que φ est dérivable sur $]0,+\infty[$, et que $\varphi'(x)=-h'(x)$.

b)En déduire que $\varphi(x)=\frac{1}{2}-h(x)$

c)Montrer alors que la courbe de φ se déduit de celle de f par une rotation que l'on précisera.

5)Soit u la suite définie par $u_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varphi(n+k)$

a)Montrer que $\varphi(2n)\leq u_n\leq\varphi(n)$
b)En déduire la limite de la suite u.

Exercice 3

Soit g la fonction définie sur $]0,\frac{\pi}{4}]$ par $g(x)=\frac{1}{\sin 2x}$.

2)Etudier les variations de g.
3)Montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur un intervalle J à préciser.
4)a)Etudier la dérivabilité de h sur J.
b)Calculer $h(\sqrt{2})$ et $h'(\sqrt{2})$.

c)Montrer que pour tout $x>1$, on a : $h'(x)=\frac{-1}{2x\sqrt{x^2-1}}$.

5)Pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{4}[$, on pose $\varphi(x)=h(\frac{1}{\cos 2x})$

a)Montrer que φ est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{4}[$ et calculer $\varphi'(x)$.

b)En déduire que, pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{4}[$, $\varphi(x)=-x+\frac{\pi}{4}$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]0, \pi]$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1+\cos x}{\sin x} \text{ ; si } x \neq \pi \\ f(\pi) = 0 \end{cases}$

1) a)Montrer que f est continue en π.
   b)f est elle dérivable en π ?

2) a)Montrer que pour tout $x \in]0, \pi]$, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{-1+\cos x}$
   b)Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé.

3) a)Montrer que f réalise une bijection de $]0, \pi]$ dans un intervalle I que l'on déterminera. On notera g sa fonction réciproque.
   b)Vérifier que $g(1) = \dfrac{\pi}{2}$. Tracer la courbe C ' de g

4)a)Montrer que $f^2(x) = \dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$, puis exprimer cos x en fonction de f(x).
   b)Montrer que g est dérivable sur I, et que $g'(x) = \dfrac{-2}{1+x^2}$.

Exercice 5

I - Soit f la fonction définie sur $I = [-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \sqrt{1+\tan x}$

1)Etudier la dérivabilité de f sur I
2)Dresser le tableau de variation de f, puis tracer sa courbe.
3)a)Montrer que f réalise une bijection de I sur $[0,+\infty[$
b)Tracer la courbe de f^{-1}.
c)Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur $[0, +\infty[$ et déterminer sa fonction dérivée.

II - Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} g(x) = f^{-1}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right), \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

1)Montrer que g est continue en 0.

2)Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x > 0$, $g'(x) = \dfrac{-1}{x^2+1}$

3)Soit x un réel strictement positif

a)Montrer qu'il existe un réel $c \in]0,x[$ tel que $\dfrac{g(x)-\frac{\pi}{2}}{x} = \dfrac{-1}{c^2+1}$

b)En déduire que g est dérivable en 0.
4)Dresser le tableau de variation de g , puis tracer la courbe de g.

Série 14.

Ex 21

1). $f: \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \tan(\pi x)$.

On a $x \mapsto \pi x$ dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

$x \mapsto \tan x$ dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$,

donc $x \mapsto f(x)$ " " ".

d'où $f'(x) = \pi \cdot (1 + \tan^2(\pi x)) > 0$.

donc f strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

Donc f admet une fonction réciproque h définie sur $f\left(\left]\lim_{-\frac{1}{2}^+} f, \lim_{\frac{1}{2}^-} f\right[\right) = \mathbb{R}$.

On remarque que $f\left(\frac{1}{4}\right) = 1$

2) Comme $f'\left(\frac{1}{4}\right) = \pi\left(1 + \tan\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi \neq 0$.

donc h est dérivable en $1 = f\left(\frac{1}{4}\right)$

et $h'(1) = \dfrac{1}{f'(h(1))} = \dfrac{1}{2\pi}$.

3) pour $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ $f'(x) = \pi(1 + \tan^2 \pi x) \geq 1 > 0$

donc h est dérivable sur $f\left(\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$.

* $h'(x) = \dfrac{1}{f'(h(x))}$

Soit $\begin{cases} y = h(x) \iff f(y) = x \\ y \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

alors $x = \tan(\pi y)$

On a $h'(x) = \dfrac{1}{f'(y)} = \dfrac{1}{\pi(1 + \tan^2 \pi y)}$

$= \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$.

4) a) On pose : ~~On pose pour~~

$\varphi :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto h\left(\frac{1}{x}\right)$.

* On a :

h dérivable sur $\mathbb{R}$

$\frac{1}{x}$ " sur $]0, +\infty[$.

et pour $x \in]0, +\infty[$, $\frac{1}{x} \in]0, +\infty[$

φ dérivable sur $]0, +\infty[$.

pour tout $x \in]0, +\infty[$;

$\varphi'(x) = \dfrac{-1}{x^2} \cdot h'\left(\frac{1}{x}\right)$

$= \dfrac{-1}{x^2} \cdot \dfrac{1}{\pi\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$

$= -\dfrac{1}{\pi(x^2+1)} = -h'(x)$.

b) On pose $\omega :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \varphi(x) + h(x)$

φ et h dérivables sur $]0, +\infty[$

donc ω dérivable sur $]0, +\infty[$.

~~$\omega'(x)$~~ et pour $x \in]0, +\infty[$,

$\omega'(x) = \varphi'(x) + h'(x)$

$= \varphi'(x) - \varphi'(x) = 0$.

donc ω est constante sur $]0, +\infty[$.

pour $x \in]0, +\infty[$, $\omega(x) = \omega(1)$

$= h(1) + h(1)$

$= 2 \cdot \frac{1}{4}$

$\omega(x) = \frac{1}{2}$

équivaut à : $\varphi(x) = \frac{1}{2} - h(x)$.

c)

Ex 2 | 4) c)

* h la reciproque de f.
ssi $\mathcal{C}_h = S_\Delta(\mathcal{C}_f)$ avec Δ : la $1^{ère}$ bissectrice.

* Soit $\mathcal{C}'$ la courbe de la fonction $-h$.
On a $\mathcal{C}' = S_{(O,\vec{i})}(\mathcal{C}_h)$.

* Comme $\varphi(x) = \frac{1}{2} + (-h(x))$; $x \in \mathbb{R}_+^*$.
donc $\mathcal{C}_\varphi = t_{\frac{1}{2}\vec{j}}(\mathcal{C}')$

" $\mathcal{C}_\varphi = t_{\frac{1}{2}\vec{j}}\left(S_{(O,\vec{i})}(\mathcal{C}_h)\right)$

" $\mathcal{C}_\varphi = t_{\frac{1}{2}\vec{j}} \circ S_{(O,\vec{i})} \circ S_\Delta(\mathcal{C}_f)$.

5) * Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k=0}^{n}\varphi(n+k)$

* On a $\varphi'(x) = -h'(x) < 0$
pour tout $x\in]0,+\infty[$.

* On a $0 \leq k \leq n$.
ssi $n \leq k+n \leq 2n$; φ décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
donc $\varphi(n) \geq \varphi(k+n) \geq \varphi(2n)$
ssi $\sum_{k=0}^{n}\varphi(2n) \leq \sum_{k=0}^{n}\varphi(k+n) \leq \sum_{k=0}^{n}\varphi(n)$
ssi $(n+1).\varphi(2n) \leq \sum_{k=0}^{n}\varphi(k+n) \leq (n+1).\varphi(n)$
ssi $\varphi(2n) \leq \frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k=0}^{n}\varphi(k+n) \leq \varphi(n)$
ssi $\varphi(2n) \leq U_n \leq \varphi(n)$.

b) On a $\varphi(2n) \leq U_n \leq \varphi(n)$
Or $\lim_{n\to+\infty} n = \lim_{n\to+\infty} 2n = +\infty$
et $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2} - h(x) = 0$

$\begin{cases} \text{car } \lim_{x\to\frac{1}{2}^-}(f(x)) = +\infty \\ \lim_{y\to+\infty} h(x) = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Ex 3

$g :]0,\frac{\pi}{4}] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{\sin 2x}$

2) On a $x\mapsto 2x$ dérivable sur $\mathbb{R}$. ($x\mapsto\sin x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.)
$x\mapsto\sin 2x$ et non nulle sur $]0,\frac{\pi}{4}]$.
donc $x\mapsto g$ dérivable sur $]0,\frac{\pi}{4}]$.
pour $x\in]0,\frac{\pi}{4}]$, $g'(x) = \frac{-2.\cos(2x)}{\sin^2 2x}$
pour $x\in]0,\frac{\pi}{4}]$, $2x\in]0,\frac{\pi}{2}]$.
donc $\cos(2x)$ ...
... $g'(x) \leq 0$

donc g est strictement décroissante.
[Car $g'(x) = 0$ ssi $x = \frac{\pi}{4}$; pour $x\in]0,\frac{\pi}{4}]$].

3) Comme g est continue, strictement monotone sur $]0,\frac{\pi}{4}]$,
alors g réalise une bijection de $]0,\frac{\pi}{4}]$
sur $g(]0,\frac{\pi}{4}]) = [g(\frac{\pi}{4}), \lim_{0^+} g[$
$= [1,+\infty[$
$= J$.

4) a) pour $x\in]0,\frac{\pi}{4}[$, $g'(x) < 0$.
donc h est dérivable sur
$g(]0,\frac{\pi}{4}[) =]1,+\infty[$.
* pour $x = \frac{\pi}{4}$, $g'(x) = 0$
donc h n'est pas dérivable en $g(\frac{\pi}{4}) = 1$.

b) On remarque que $g(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2}$
donc $h(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{8}$.
$h'(\sqrt{2}) = \frac{1}{g'(h(\sqrt{2}))} = \frac{1}{g'(\frac{\pi}{8})}$
$= \frac{1}{\frac{-2.\cos(\pi/4)}{\sin^2(\frac{\pi}{4})}} = \frac{1/4}{-\cancel{2}.\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}$
$= \frac{-\sqrt{2}}{4}$.

c) pour $x\in]1,+\infty[$, On a h dérivable.
et $h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))}$

On pose $\begin{cases} y = h(x) \iff x = g(y) \\ x\in]1,+\infty[\\ y\in]0,\frac{\pi}{4}] \end{cases}$
donc $x = \frac{1}{\sin 2y}$.

On a $\cos^2 2y + \sin^2 2y = 1$

ssi $\cos 2y = \sqrt{1-\sin^2 2y}$

$= \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

d'où $g'(y) = \frac{-2\cos(2y)}{\sin^2(2y)}$

$= (x^2)(-2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})$

d'où $h'(x) = \frac{1}{-2x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

$= \frac{-1}{2x\sqrt{x^2-1}} < 0$

Ex 4

f:

5) pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}[$, On pose.

$\varphi : x \longmapsto h\left(\frac{1}{\cos 2x}\right)$.

On a $x \longmapsto \frac{1}{\cos 2x}$ dérivable sur $]0, \frac{\pi}{4}[$.

et h dérivable sur $]1, +\infty[$.

et pour $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$, $\frac{1}{\cos 2x} > 1$.

donc φ continue sur $]0, \frac{\pi}{4}[$.

pour $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$, $\varphi'(x) = \left(\frac{1}{\cos(2x)}\right)' \cdot h'\left(\frac{1}{\cos 2x}\right)$

$\varphi'(x) = \frac{+\cancel{2}\sin(2x)}{\cos^2(2x)} \cdot \frac{(-1)}{\frac{\cancel{2}}{\cos(2x)}\sqrt{\frac{1}{\cos^2(2x)}-1}}$

$= \frac{-\sin 2x}{\cos(2x)\sqrt{\frac{1}{\cos^2(2x)}} \cdot \sqrt{1-\cos^2 2x}}$

* pour $2x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos 2x > 0$ et $\sin 2x > 0$.

$\varphi'(x) = \frac{-\cancel{\sin 2x}}{\cancel{\cos 2x} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos 2x}} \cdot \cancel{\sin 2x}} = -1$.