Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°13 4éme Math	Prof:M.Benali

PROBLEME

Soit f la fonction définie sur $[0,2[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x - x^2}} & \text{si } x \in \,]0,2[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

A) 1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b) Etudier les variations de f sur $[0, 2[$.

2) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $[0, +\infty[$

3) a) Montrer que pour tout $x \in [0, 2[$: $f(x) \geq x$

b) Tracer, dans le même RON $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ représentatives de f et g.

On précisera les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

4) Soit : $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que l'équation : $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans $[0, 2[$ une solution unique V_n.

b) Montrer que la suite (V_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

c) On désigne par ℓ la limite de la suite (V_n). Montrer que $f(\ell) = 0$. Déduire la valeur de ℓ.

B) 1) a) Montrer que pour tout x de $[0, +\infty[$: $g(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$.

b) Montrer que pour tout x de $[3, 4]$: $|g'(x)| \leq \frac{4}{25}$.

c) Montrer que l'équation : $g(x) = \frac{1}{2}x$ admet dans $[3, 4]$ une solution unique α.

2) On considère la suite U définie sur IN par : $\frac{\alpha}{2} < U_0 < 2$ et $U_{n+1} = g(2U_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{\alpha}{2} < U_n < 2$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - \frac{\alpha}{2}| \leq \frac{8}{25}|U_n - \frac{\alpha}{2}|$.

c) En déduire que la suite U converge vers une limite que l'on précisera.

C) Soit h la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par : $h(x) = \frac{1}{\sin 2x} - f(2\cos^2 x)$.

1) a) Montrer que, pour tout $x \in \,]0, \frac{\pi}{2}[$ on a : $h(x) = -\cot g 2x$.

b) Montrer que h est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur IR. Soit φ sa fonction réciproque.

c) Calculer $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

2) Montrer que φ est dérivable sur IR et que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\varphi'(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$

3) Montrer que $\varphi(x) + \varphi(\frac{1}{x}) = \frac{3\pi}{4}$ pour tout $x \in \,]0, +\infty[$

4) Soit : $W_n = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=n}^{k=2n}\varphi(k)$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\varphi(n) \leq W_n \leq \varphi(2n)$.

b) En déduire que la suite (W_n) est convergente et donner sa limite.

Prof:M.Benali

Série 13 Brouillon

Problème :

pour $x \in [0, 2[$,

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x-x^2}} & \text{si } x \in]0,2[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

A/ 1) On a:

la fct: $x \mapsto 2x - x^2$ polynôme, dérivable ~~continue~~ et strictement positive sur $]0, 2[$.

la fct: $x \mapsto \sqrt{2x-x^2}$ dérivable et non nulle sur $]0, 2[$

la fct: $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$ dérivable sur $]0, 2[$.

donc f dérivable, d'où continue, sur $]0, 2[$.

a) On a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\dfrac{x^2}{2x-x^2}}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\dfrac{1}{\frac{2}{x}-1}}$

$= 0.$

$= f(0).$

donc f continue à droite en 0.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{0^+} \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

$= +\infty.$

f n'est pas dérivable à droite en 0

b) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{2x-x^2} - \dfrac{-2x+2}{2\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2}$

$= \dfrac{2(2x-x^2) + 2x^2 - 4x}{2 \cdot \sqrt{2x-x^2}^{\,3}}$

$= \dfrac{-4x^2+8x}{2\sqrt{2x-x^2}^{\,3}}$

$= \dfrac{4x-2x^2}{\sqrt{2x-x^2}^{\,3}}$

$= \dfrac{2 \cdot (2x-x^2)}{(2x-x^2) \cdot \sqrt{2x-x^2}}$

$= \cancel{\dfrac{2}{\sqrt{2x-x^2}}} = \dfrac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$

pour $x \in]0, 2[$,

$f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x-x^2}} > 0.$

x	0		2
$f'(x)$		+	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{\sqrt{2x-x^2}} = +\infty$

f est strictement croissante sur $[0, 2[$.

donc elle ~~est~~ bijective de $[0, 2[$ sur $[$

d'où elle admet une réciproque g définie s

$[0, +\infty[$.

3)a) pour $x \in]0,2[$,

$f(x) - x = x\left(\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} - 1\right)$

$= x\left(\frac{1-\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2x-x^2}}\right)$

$= x\left(\frac{1-2x+x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\right)$

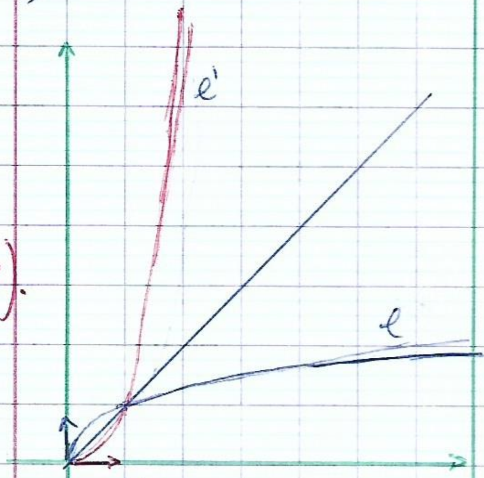
~~or $0 \leq 2x < 4$ ...~~

$= x \cdot \frac{(x-1)^2}{\sqrt{2x-x^2}\cdot(1+\sqrt{2x-x^2})} \geq 0$

Pour $x=0$, $f(0)=0$ donc $f(x) \geq x$.

donc $f(x) \geq x$.

b)



$\mathscr{C}' = S_\Delta(\mathscr{C})$.

~~...~~

donc $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

or $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = 0$

$f(1) = 1$.

4) a) On a $n \in \mathbb{N}^*$,

$1 \geq \frac{1}{n} > 0$

On a $f([0,1]) = [0,1]$
or f strictement monotone sur $[0,1]$

donc $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une seule solution $V_n \in [0,1] \subset [$

b) Comme $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$\iff n \geq 1$

$\iff 0 < \frac{1}{n} \leq 1$

f réalise une bijection de $[0,2[$ sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $\frac{1}{n} \in]0,1] \subset \mathbb{R}_+$.

donc il existe un unique $V_n \in [0,2[$ tel que $f(V_n) = \frac{1}{n}$.

B/ 1)a) On a :

$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,2[$
$x \longmapsto g(x) = y$?

$\begin{cases} y = g(x) \iff f(y) = x \\ y \in [0,+\infty[\\ x \in [0,2[\end{cases}$

On a $f(y) = x$

ssi $\frac{y}{\sqrt{2y-y^2}} = x$

ssi $\frac{y^2}{2y-y^2} = x^2$

ssi $y^2 - 2x^2y + x^2y^2 = 0$

ssi $y\left[(1+x^2)y - 2x^2\right] = 0$

ssi $y = 0$ ou $y = \frac{2x^2}{1+x^2}$

pour $x \in [0,+\infty[$, $g(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

C/ 4) On a $n \leq K \leq 2n$ et φ strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

ssi $\varphi(n) \leq \varphi(K) \leq \varphi(2n)$

ssi $\displaystyle\sum_{K=n}^{2n} \varphi(n) \leq \sum_{K=n}^{2n} \varphi(K) \leq \sum_{K=n}^{2n} \varphi(2n)$

ssi $\displaystyle(n+1)\cdot\varphi(n) \leq \sum_{K=n}^{2n} \varphi(K) \leq (n+1)\cdot\varphi(2n)$.

ssi $\displaystyle\varphi(n) \leq \frac{1}{n+1}\cdot\sum_{K=n}^{2n} \varphi(K) \leq \varphi(2n)$.

ssi $\varphi(n) \leq W_n \leq \varphi(2n)$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(2n) = \frac{\pi}{2}$.

alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} W_n = \frac{\pi}{2}$.