Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°12 4éme Math	Prof:M.Benali

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{|x^2-2x|}$ de courbe représentative ζ_f dans un repère orthonormée $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a/ Montrer que la droite d'équation $x=1$ est un axe de symétrie de la courbe ζ_f.

b/ Etudier la dérivabilité de f en 2 . En déduire la dérivabilité de f en 0 . Interpréter graphiquement les résultats obtenus .

2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=f(x)-(x-1)$

a/ Etudier les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation .

b/Montre que l'équation $f(x)=x-1$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α .Vérifier que $\alpha\in\,]1,2[$.

c/ Déduire du tableau de variation de h le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$ .En déduire la position de la courbe ζ_f par rapport à la droite d'équation $y=x-1$.

3) Etudier les variations de f et tracer sa courbe ζ_f.

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[2,+\infty[$

a/ Montrer que g est une bijection de $[2,+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b/ Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur J et calculer $(g^{-1})'(\sqrt{3})$.

c/ Déterminer l'expression de g^{-1} et calculer $(g^{-1})'(x)$ .Retrouver la valeur de $(g^{-1})'(\sqrt{3})$.

d/ Tracer la courbe de g^{-1} dans le même repère.

Partie B :

Soit Ψ la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $\Psi(t)=f(\cos t)$.

1) a/ Déterminer $\Psi(t)$ sur chacun des intervalles $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

b/ Montrer que Ψ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$, calculer $\Psi'(t)$ sur chacun de ces intervalles et donner le signe de $\Psi'(t)$.

c/ Etudier la dérivabilité de Ψ en $\frac{\pi}{2}$.

d/ Dresser le tableau de variation de Ψ et tracer sa courbe dans un deuxième repère .

2) Soit $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\Psi(t)=\sqrt{2\cos t-\cos^2 t}$.

a/ Montrer que l'équation $\Psi(t)=t$ admet une solution unique $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$.

b/ Vérifier que pour tout $t\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ on a $|\Psi'(t)|<\frac{1}{2}$.

Partie C :

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases}U_0\in\,]0,\alpha[\\ U_{n+1}=\Psi(U_n)\end{cases}$

1) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a $U_n\neq\alpha$.

2) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a $|U_{n+1}-\alpha|<\left(\frac{1}{2}\right)|U_n-\alpha|$.

Prof:M.Benali

3) En déduire que $\forall n\in$

4) En déduire que