Série de révision 4maths

Exercice 1 (4 points)

1. On considère $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $4x - 5y = 1$
   a. Montrer que (-1 , -1) est une solution de (E)
   b. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)
   c. En déduire que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$, du système (S) :
   $$\begin{cases} x \equiv 3(\text{mod}5) \\ x \equiv 2(\text{mod}4) \end{cases}$$
   est l'ensemble des entiers x tels que $x = 20k - 2$, $k \in \mathbb{Z}$
2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $a = 4n + 3$ et $b = 3n + 1$
   a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $a \wedge b = (n + 2) \wedge 5$, puis en déduire les valeurs de l'entier naturel n tels que : $a \wedge b = 5$
   b. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 2^n par 5
   c. Montrer que : $2^a + 3^b \equiv 0(\text{mod}5) \Leftrightarrow 2^{a+b} \equiv 4(\text{mod}5)$
   d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $\begin{cases} n \geqslant 2020 \\ 2^a + 3^b \equiv 0(\text{mod}5) \\ a \wedge b = 5 \end{cases}$

Exercice 2 (4 points)

Une société de distribution d'électricité ayant une production insuffisante en électricité pour assurer une alimentation continue dans tout le pays, procède à des délestages.
Ainsi à partir d'un certain jour les délestages ont débuté dans une ville à un rythme décrit comme suit :
Le premier jour la ville est délestée.

- Si la ville est délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{2}{9}$.
- Si elle n'est pas délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{5}{6}$

On désigne par D_n l'événement : "la ville est délestée le jour n" et p_n la probabilité de D_n .
Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où la ville est délestée au cours des trois premiers jours.

1. a. Montrer que $p(X = 2) = \frac{133}{162}$.
   b. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a $p_{n+1} = -\frac{11}{18}p_n + \frac{5}{6}$
3. Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n = 6p_n - \frac{90}{29}$
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme .
   b. Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.
   c. Un match de football doit se jouer le vingtième jour. Quelle est la probabilité pour que les habitants de la ville le suivent sans délestage.
4. La durée de vie T, exprimée en mois, des lampes utilisées par les habitants de la ville suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,02$
   a. Quelle est la probabilité que la durée de vie d'une lampe dépasse une année ?

b) Une lampe a fonctionné pendant six mois, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse deux ans ?

c) Dans une maison de cette ville il y a dix lampes qui fonctionnent de manières indépendantes Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre elles fonctionnent plus qu'une année ?

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \ln(\tan x)$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. a) Montrer que f possède une fonction réciproque φ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   b) Préciser les limites de φ en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. a) Montrer que pour tout réel x, $\varphi'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$.

   b) Montrer que pour tout réel x, $\varphi(x) + \varphi(-x) = \dfrac{\pi}{2}$.
4. Pour tout réel x, on pose : $G(x) = \dfrac{1}{2}\Big(\varphi'(x) + \varphi(x)\Big)$ et $g(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^{2x})^2}$

   Montrer que G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
5. On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \displaystyle\int_{-n}^{n} \frac{te^t}{(1+e^{2t})^2}dt$.

   a) Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 0$,

   $$n\Big(\varphi(n) + \varphi(-n)\Big) - \int_{-n}^{n} \varphi(t)dt = \int_{-n}^{n} \left(\frac{\pi}{4} - \varphi(t)\right)dt$$

   b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

   $$U_n = n\varphi'(n) - \frac{1}{2}\Big(\varphi(n) - \varphi(-n)\Big)$$

   c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 4 (6 points)

Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 + (1-2i)z^2 + (1-2i)z - 2i$

1. Calculer $P(2i)$ et déterminer les solutions z_0, z_1 et z_2 se l'équation $P(z) = 0$ sachant que : $\operatorname{Im}(z_0) \geqslant \operatorname{Im}(z_1) \geqslant \operatorname{Im}(z_2)$.
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 On pose $z' = f(z) = \dfrac{1}{z^2+z+1}$.

   On note M et M' les points d'affixes respectives z et z'

   a) Vérifier que la droite (BC) a pour équation $2x + 1 = 0$

   b) Démontrer que si M décrit la droite (BC) privé de B et C, alors M' est situé sue l'axe des abscisses.
3. a) Démontrer que si $|z| = 1$, alors $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}$

   b) Vérifier que si, $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\pi, \pi] \setminus \left\{-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right\}$, alors $f(z) = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$
4. a) Démontrer que si M décrit le cercle trigonométrique privé de A et C alors M' est situé sur la courbe Γ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = (2x-1)^2$

   b) Démontrer que Γ est une hyperbole. Déterminer le centre et les sommets puis cal[...] centricité de Γ

   c) Construire Γ