Résumé du cours

Division euclidienne. On appelle q quotient de a par b l'entier défini comme suit :

q est le plus grand entier $\leq \frac{a}{b}$ si b > 0. q est le plus petit entier $\geq \frac{a}{b}$ si b < 0

Définition : On appelle reste de la division de a par b l'entier positif $r = a - bq$

Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est déterminer le couple unique (q, r) tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$

Congruence :On dit que a est congru à b modulo n noté $a \equiv b(\bmod n)$ si a-b multiple de n ou encore a-b = kn avec $k \in \mathbb{Z}$.

Définition : a entier, $\exists !$ entier r $\in \{0,1,....,n-1\}$ r est appelé le reste modulo n de a

Conséquences: deux entiers sont congrus modulo n $\Leftrightarrow$ ils ont le même reste modulo n

Propriétés : Soient a, b et c trois entiers et n entier naturel non nul

- Si $\begin{cases} a \equiv b(\bmod n) \\ c \equiv d(\bmod n) \end{cases}$ alors $(a+c) \equiv (b+d)(\bmod n)$ et $(ac) \equiv (bd)(\bmod n)$
- Si $a \equiv b(\bmod n)$ alors $ka \equiv kb(\bmod n)$, k entier et $a^m \equiv b^m(\bmod n)$; $m \in \mathbb{Z}^*$

Théorème de Fermat : soit a $\in \mathbb{N}$, p nombre premier ne divise pas a, $a^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$

Exercice 1

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 14^8 par 17.
2) En déduire le reste de la division euclidienne de 14^{16} et 14^{1746} par 17.

Exercice 2

1) Effectuer la division euclidienne de 1208 par 51.
2) Sans effectuer la division euclidienne déterminer :
   a) Le quotient et le reste de la division euclidienne de -1208 par 51.
   b) Le quotient et le reste de la division euclidienne de 1208 par 23.

Exercice 3

Soit x et y deux entiers relatifs.

(Les questions sont indépendantes les unes des autres)

1) Démontrer que si $x \equiv 0(\bmod y)$ alors $x^2 \equiv 0(\bmod y^2)$.
2) Démontrer que si $2x^2 \equiv 1(\bmod y^2)$ alors y est impair.
3) Démontrer que si $y^2 - 2x^2 = 1$ alors x est pair.
4) Dans cette question, y est un entier naturel non nul et n un entier naturel.
   On note q le quotient de la division euclidienne de $x-1$ par y .
   Déterminer le quotient de la division euclidienne par $(xy^n - 1)$ par y^{n+1}.

Exercice 4

1) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$:
   $5^{2^{n-2}} - 1 = 24(1+5^{2^1})(1+5^{2^2})...(1+5^{2^{n-3}})$
2) En déduire que $5^{2^{n-2}} \equiv 1 \bmod 2^n$
3) Existe-t-il un entier naturel n tel que $5^{2^{n-2}} - 1$ soit divisible par 2^{n+1}

Exercice 5

1) $n \in N$, déterminer suivant n, le reste de la division de $3^n + 1$ par 8
2) Soit (E) l'équation dans N x N : $2^p - 3^q = 1$
   a) Montrer que $p \leq 2$.
   b) Résoudre alors l'équation (E).
3) Existe-t-il un couple d'entiers naturels p et q tels que $2^p + 1 = q^3$

Exercice 6

Déterminer tous les nombres premiers p, q et r tel que : $15p+7pq+qr=pqr$

Exercice 7

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tel que 17 divise $(n+1)^{17}-2$

Exercice 8

Déterminer tous les entiers naturels n et p tel que $15^n-21^p\equiv 0 \bmod 12$

Exercice 9

Les questions sont indépendantes les unes des autres. n est un entier

1) Montrer que : $(2^{123}+3^{121})\equiv 0 \bmod 11$,
2) Montrer que $(4^{2^n}+2^{2^n}+1)\equiv 0 \bmod 7$
3) Montrer que $3.5^{2n-1}+2^{3n-2}\equiv 0 \bmod 17$,
4) Montrer que $(4^n-1-3n)\equiv 0 \bmod 9$,
5) Quel est le reste de la division par 7 de : 32^{270} , $1234^{4321}+4321^{1234}$
6) Déterminer : le chiffre des unités de 7^{792}
7) Déterminer le chiffre des dizaines de 444^{44}. En déduire le chiffre des dizaines de 38862602496^{11^n}.
8) Montrer que $2^{147}-1$ n'est pas premier
9) Montrer que $\forall n\in N$, $\forall p\in N^*$: n^{p+4} et n^p ont le même chiffre des unités.

Exercice 10

Soit la suite (u_n) définie sur N par $u_0=14$ et $u_{n+1}=5u_n-6$

1) Montrer que pour tout n $\in N$, $u_{n+2}\equiv u_n(\bmod 4)$
2) En déduire que pour tout n $\in N$, $u_{2n}\equiv 2(\bmod 4)$ et que $u_{2n+1}\equiv 0(\bmod 4)$
3) a) Montrer que pour tout n appartenant à N, on a : $2u_n=5^{n+2}+3$

   b) En déduire la suite (u_n) est un entier naturel

   c) Montrer que $2u_n\equiv 28(\bmod 100)$
4) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le chiffre des unités et des dizaines de l'écriture décimale de la suite (u_n).

Exercice 11

1) a) Effectuer la division euclidienne de 2009^2 par 16

   b) En déduire que $2009^{8001}\equiv 2009(\bmod 16)$

2) On considère la suite (u_n) définie sur N par $\begin{cases} u_0=2009^2-1 \\ u_{n+1}=(u_n+1)^5-1 \end{cases}$

   a) Démontrer que u_0 est divisible par 5

   b) Démontrer que $u_{n+1}=u_n\left(u_n^{\,4}+5\left(u_n^{\,3}+2u_n^{\,2}+2u_n+1\right)\right)$

   c) Démontrer que $u_n\equiv 0(\bmod 5^{n+1})$.

3) a) Démontrer que $2009^{250}\equiv 1(\bmod 625)$.

   b) En déduire que $2009^{8001}\equiv 2009(\bmod 625)$

4) Montrer que $2009^{8001}\equiv 2009(\bmod 10000)$

5) En déduire qu'il existe un entier naturel p tel que $p^3\equiv 2009(\bmod 10000)$