Lycée Pilote de Sfax A/S 2020-2021	Série de révision N°1 Nombres complexes	Mr : Mourad EL arbi $4^{ème}$ Math

1 Soit Z et Z' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ et θ'.

Montrer que $|Z+Z'|=|Z-Z'| \Leftrightarrow \theta=\theta'+\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

① $Z^4\left(1+Z^4\right)=-1+i$

② $Z^n=\overline{Z}$, $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.

③ $1+2Z+2Z^2+...+2Z^{n-1}+z^n=0$, $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.

3 On considère l'équation $(E): Z^7-\sqrt{2}iZ^6+8iZ+8\sqrt{2}=0$.

① Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire Z_0 à préciser.

② Résoudre alors l'équation (E).

③ Représenter les points images des solutions de l'équation (E) dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

④ Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe Z tels que $\left(\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)Z}{\overline{Z}}\right)^3$

est un réel strictement positif.

4 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$. Soit K le point d'affixe -1.

① Soit $a\in\mathbb{C}^*$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): \overline{a}\,Z^2-\left(|a|^2-1\right)Z-a=0$.

b) Montrer que les points images des solutions de (E) et le point O sont alignés.

② Pour tout $a\in\mathbb{C}^*$, On désigne par $M(a)$ et $M'\left(\frac{-1}{\overline{a}}\right)$.

On suppuose que M appartient au cercle Γ de centre I et de rayon 1.

a) Montrer que M' appartient à la médiatrice du segment $[OK]$.

b) En déduire une construction géométrique du point M' à partir du point M.

③ On suppose que $a\notin\mathbb{R}$.

a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{M'I},\overrightarrow{M'K}}\right)\equiv\pi+\left(\widehat{\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MK}}\right)[2\pi]$.

b) En déduire une construction géométrique du point M' à partir du point M.

5 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ): $iZ^2+e^{i2\theta}Z+i\left(e^{i2\theta}+1\right)=0$, $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Soit Z_1 et Z_2 les solutions de l'équation (E_θ).

① Sans calculer Z_1 et Z_2, montrer que $\arg\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}\right)\equiv\theta+\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

② Déterminer la valeur de θ pour que $Z_1+Z_2=-1$.

③ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

④ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et M d'affixes respectives $-i$ et $i\left(e^{i2\theta}+1\right)$.

a) Déterminer la valeur de θ pour que le triangle OAM soit isocèle en O.

b) Déterminer et construire l'ens... ...dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

6 ① Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta): Z^2-(i+2e^{i\theta})Z+e^{2i\theta}+ie^{i\theta}=0$, $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

② On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E'_\theta): Z^3-2(i+e^{i\theta})Z^2+(e^{2i\theta}+3ie^{i\theta}-1)Z-ie^{2i\theta}+e^{i\theta}=0$.

a) Vérifier que i est une solution de (E'_θ).

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'_θ).

③ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A, M, et M′ les points d'affixes respectives i, $e^{i\theta}$ et $i+e^{i\theta}$.

a) Vérifier que O, A et M ne sont pas alignés et que le quadrilatère OAM′M est un losange.

b) Déterminer θ pour que l'aire du losange OAM′M soit maximale.

7 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.

Soit M un point d'affixe Z distinct de B et M′ le point d'affixe $Z'=\frac{Z-1}{Z+1}$.

① a) Montrer que Z′ est imaginaire si et seulemnt si $|Z|=1$.

b) Montrer que pour tout point M distinct de B, $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM'}})\equiv-(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}})[2\pi]$.

② a) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M du plan d'affixe Z tel que $\arg(Z+1)\equiv\frac{\pi}{8}[2\pi]$.

b) Δ recoupe le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 en un point M(Z)

Déduire de ce qui précède une construction de $M'(Z')$.

③ a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2-Z+1=0$.

b) En déduire les solutions de l'équation $Z^6-Z^3+1=0$.

④ a) Montrer que pour tout réel $\theta\neq 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, $Z'=e^{i\theta}\Leftrightarrow Z=i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3=1$.