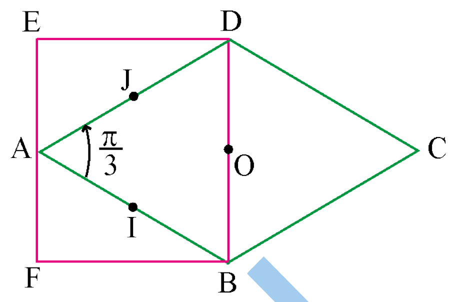
Lycée Pilote de Sfax A/S 2020-2021	Série N°20 Déplacements et antidéplacements	Mr: Mourad EL arbi $4^{ème}$ Math

Dans tous les exercices le plan est orienté dans le sens direct.



1 Dans la figure ci-contre :

- ABCD est un losange de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
- BDEF est un rectangle.
- I et J sont les milieux respectifs des segements $[AB]$ et $[AD]$.

① Soit $f = R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{JI}}$.

a) Déterminer $f(J)$ et $f(E)$

b) Caractériser alors f.

② Soit g l'isométrie qui transforme B en A, A en D et O en E.

a) Montrer que g n'admet pas de point invariant.

b) En déduire que g est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

③ Montrer que $f \circ g = R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)} \circ S_{(IJ)}$.

④ a) Déterminer les images des points I, O et F par $f \circ g$.

b) Montrer que $f \circ g$ est une symétrie glissante.

c) On note Δ l'axe de $f \circ g$. Montrer que Δ est perpendiculaire à (OF) puis construire Δ.

d) Construire le point $F' = S_{\Delta}(F)$. Vérifier que $\overrightarrow{F'D}$ est le vecteur de $f \circ g$.

⑤ a) Montrer que $f \circ g((BC)) = (OF)$.

b) Soit C' le point tel que $CC'DF'$ est un parallélogramme. Montrer que C' appartient à la droite (OF).

2 Soit ABC un triangle direct et A' le milieu du segment $[BC]$.

Soit P et Q les deux points définis par $\begin{cases} PA = PC \\ (\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} QB = QA \\ (\widehat{\overrightarrow{QB},\overrightarrow{QA}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$.

On désigne par Ω le milieu du segment $[PQ]$, I le milieu du segment $[QA']$, J le milieu du segment $[PA']$ et P' le symétrique de P par rapport à A'.

On désigne par R_P et R_Q et les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs P et Q.

On pose $f = R_Q \circ S_{A'} \circ R_P$.

① a) Déterminer $f(A)$. Caractériser alors f.

b) Montrer que $R_Q(P') = P$.

② a) Montrer qu'il existe un unique déplacement φ tel que $\varphi(A') = Q$ et $\varphi(P) = A'$.

b) Caractériser φ.

c) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h = \varphi \circ S_{(A'Q)}$.

③ Soit ψ l'antidéplacement qui envoie A' sur Q et P sur A'.

a) Montrer que $\psi(J) = I$.

b) Montrer que ψ est une symétrie glissante.

c) Déterminer les éléments caractéristiques de ψ.

④ Soit M un point du plan. On pose $\psi(M) = M_1$ et $\varphi(M) = M_2$.

Montrer que M_1 et M_2 sont sy... ...xe que l'on déterminera.

3 On considère un parallélogramme ABCD de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit I le milieu de $[DC]$ et E le point tel que CED soit un triangle équilatéral direct.

① a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = E$ et $f(B) = D$.

b) En déduire que f est une rotation dont on précisera l'angle.

c) Montrer que I est le centre de f et préciser $f((CD))$.

② La droite (EC) coupe (AB) en F.

a) Montrer que AEF est équilatéral et que $f(F) = A$.

b) Pour tout M du plan on considère les points $M_1 = R_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)}(M)$ et $M_2 = R_{\left(E, \frac{\pi}{3}\right)}(M)$.

Montrer que M_2 est l'image de M_1 par une translation dont on précisera le vecteur.

③ On pose $\psi = t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(BC)}$, $g = t_{\overrightarrow{BA}} \circ S_{(BC)}$ et $h = g \circ S_{(BD)}$. On désigne par J le milieu de $[AB]$.

a) Montrer que ψ est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe puis déterminer $\psi(J)$.

b) En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur $\vec{u}$ et l'axe Δ.

c) Donner la nature de h et ses éléments caractéristiques.

4 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit OABC un parallélogramme direct.

Soit R la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et R' la rotation de centre A et d'angle $\frac{-\pi}{4}$.

① Construire les points $B' = R(B)$ et $B'' = R'(B)$.

② Montrer que $z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{4}} z_{B''}$.

③ En déduire que le triangle $OB'B''$ est isocèle en O.

5 Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

① Soit R_1 et R_2 deux rotations de même angle α.

S'il existe un point M du plan tel que $R_1(M) = R_2(M)$ alors $R_1 = R_2$.

② Soit A et B deux points et f un antidéplacement qui envoie A sur B.

Alors l'isométrie $f \circ t_{\overrightarrow{BA}}$ est une symétrie orthogonale.

③ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

a) L'application $f : P \to P$

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ tel que } z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(\frac{z+1}{2}\right).$$

f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre I tel que $z_I = \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

b) L'application $g : P \to P$

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ tel que } z' = \bar{z} + (3 + 2i)$$

g est une symétrie glissante d'axe la droite $\Delta : y = 1$ est de vecteur $\overrightarrow{w_1}$ d'affixe 3.