Lycée Pilote de Sfax A/S 2020-2021	Série N°19 Fonction réciproque	Mr : Mourad EL arbi 4ème Math

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2+\dfrac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+1}}$.

On désigne par C_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① Dresser le tableau de variation de f.

② Montrer que le point d'abscisse 2 est un point d'inflexion de C_f.

③ Tracer C_f.

④ a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer $C_{f^{-1}}$ la courbe de f^{-1}.

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

2 Soit f la fonction définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{\sin(2x)}}{\sin x}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① Montrer que f est continue sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

② a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$. Interpréter le résultat.

b) Dresser le tableau de variation de f. Tracer C_f.

③ a) Montrer que f réalise une bijection de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J à préciser.

b) Tracer $C_{f^{-1}}$ la courbe de f^{-1}.

c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et que pour tout $x\in J,\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{-4x}{4+x^4}$.

④ Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{2}{x}}\right)=\dfrac{\pi}{2}-f^{-1}\left(\sqrt{2x}\right)$.

3 Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x)=1+\tan^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① Dresser le tableau de variation de f.

② Montrer que f réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

③ Déterminer $f^{-1}(2)$ puis tracer C_f et $C_{f^{-1}}$.

④ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que pour tout $x\in]1,+\infty[$, $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{\pi x\sqrt{x-1}}$.

⑤ Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(2f^{-1}\left(2+\dfrac{k}{nk+1}\right)-1\right)$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $n\left[2f^{-1}\left(2+\dfrac{1}{n+1}\right)-1\right]\le V_n\le n\left[2f^{-1}\left(2+\dfrac{n}{n^2+1}\right)-1\right]$

b) En déduire que (V_n) est convergente et déterminer sa limite.