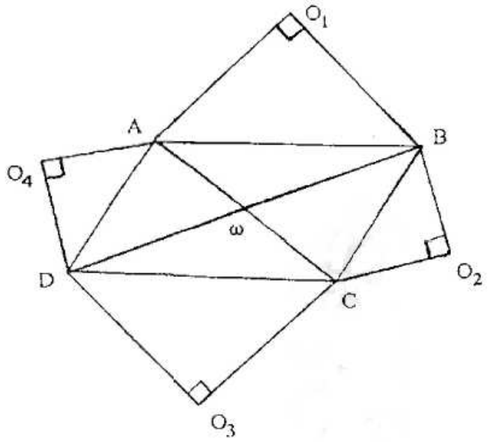
L-P-Bourguiba de Tunis | Prof :Ben jedidia Chokri

Sujet de révision

Mai 2021 | 4Math | Durée :4h

EXERCICE BAC 1996



Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme de centre ω et les triangles ABO_1, BCO_2, CDO_3 et DAO_4 sont des triangles rectangles isocèles de sommets principaux respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4. On suppose que le plan est orienté et que $(\widehat{\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1B}}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par R_1, R_2, R_3 et R_4 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4.

1) a - Déterminer $(R_2 o R_1)(A)$; $(R_3 o R_2)(B)$ et $(R_4 o R_3)(C)$.

b - Montrer que les applications $R_2 o R_1$, $R_3 o R_2$, $R_4 o R_3$ sont toutes les trois égales à une même application que l'on déterminera et que l'on désignera par f.

2) a - Montrer que $R_3(R_2(O_1)) = R_2(O_1)$ et déterminer $f(O_1)$

b - Montrer que $f(O_2) = O_4$.

c - Quelle est la nature du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$?

3) Soit Δ la médiatrice du segment [AB] et S_Δ la symétrie orthogonale d'axe Δ. On pose $g = R_2 o S_\Delta$

a - Déterminer $g(A)$ et $g(O_1)$

b - Montrer que g n'est pas une symétrie axiale et en déduire la nature de g.

c - Construire le point $\omega' = g(\omega)$. Déterminer les éléments caractéristiques de g.

EXERCICE BAC 2020

On dispose d'une urne U_1 contenant deux boules noires et deux boules blanches et d'une urne U_2 contenant une boule noire et trois boules blanches. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On procède à l'expérience aléatoire suivante :

On tire au hasard une boule de U_1.

- Si elle est blanche, on la remet dans U_1 et on tire simultanément deux boules de U_2,

- Si elle est noire, on la met dans U_2 et on tire simultanément deux boules de U_2.

On considère les évènements suivants :

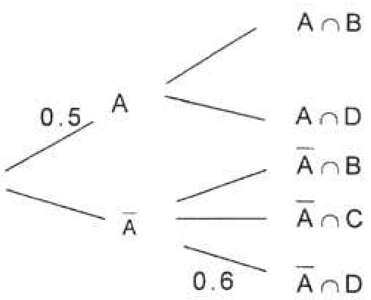
A « La boule tirée de U_1 est blanche. »

B « On tire deux boules blanches de l'urne U_2. »

C « On tire deux boules noires de l'urne U_2. »

D « On tire deux boules de couleurs différentes de l'urne U_2. ».

a) Recopier et compléter l'arbre de choix suivant :



b) Déterminer $p(B)$ et $p(D)$.

c) Montrer que la probabilité qu'il ne reste aucune boule noire dans U_2 est égale à $\frac{3}{10}$

Soit X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de boules noires restantes dans U_2.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Quelle est la probabilité qu'il reste au moins une boule noire dans U_2 ?

On répète n fois de suite $(n>1)$ et de manière indépendante l'expérience aléatoire précédente.

On désigne par F_n l'évènement : « Il ne reste dans U_2 aucune boule noire pour les $(n-1)$ premières épreuves et il reste au moins une boule noire à la $n^{\text{ème}}$ épreuve ».

Quelle est la probabilité p_n de F_n ?

EXERCICE BAC 2018

A) Soit q un entier naturel.

1) Montrer que q^2 est impair si et seulement si q est impair.

2) Montrer que si q est impair alors $q^2 \equiv 1 \pmod 8$.

B) On se propose de déterminer **l'ensemble A des triplets d'entiers naturels non nuls** (m, n, q) **tels que** $2^{2m} + 3^{2n} = q^2$.

1) Vérifier que le triplet $(2,1,5)$ est un élément de A.

Dans la suite de l'exercice on suppose que (m, n, q) **est un élément de** A.

2) a) Montrer que q est impair.

b) Montrer que $q^2 - 3^{2n} \equiv 0 \pmod 8$.

c) Montrer alors que m est différent de 1.

3) On suppose que $m \geq 2$.

a) Justifier que les entiers $(q - 3^n)$ et $(q + 3^n)$ sont pairs.

b) Soit $d = (q - 3^n) \wedge (q + 3^n)$.

Montrer que d divise $2q$ et que d divise 2^{2m}. En déduire que $d = 2$.

c) Montrer que $q - 3^n = 2$ et que $q + 3^n = 2^{2m-1}$.

En déduire que $q = 2^{2m-2} + 1$ et que $3^n = 2^{2m-2} - 1$.

4) Déterminer n et q lorsque $m = 2$.

5) On suppose que $m \geq 3$.

a) Montrer que $3^n \equiv -1 \pmod{16}$.

b) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel k, les restes possibles de 3^k dans la division euclidienne par 16.

c) En déduire qu'il n'existe pas de triplets (m,n,q) éléments de l'ensemble A tels que $m \geq 3$.

6) Déterminer l'ensemble A.

EXERCICE BAC 2004

A – On considère la fonction f_1 définie sur $[-1, +\infty[$ par $f_1(x) = \sqrt{1+x}\, e^{-x}$ et on désigne par $\mathscr{C}_1$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a – Etudier la dérivabilité de f_1 à droite de -1.
   b – Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   c – Calculer la limite de f_1 en $+\infty$.
   d – Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Dresser le tableau de variation de f_1.

3) Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse 0.

4) Montrer que l'équation $f_1(x) = x$ admet une unique solution α dans $[-\frac{1}{2}, +\infty[$

   et que $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_1$.

6) a – Montrer que pour tout réel x, on a $1 + x \leq e^x$.

   b – En déduire que pour tout réel $x \geq -1$, on a $f_1(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}$.

7) Soit λ un réel supérieur ou égal à 1 et $S(\lambda) = \int_1^{\lambda} f_1(x)\,dx$.
   a – Donner une interprétation graphique du réel $S(\lambda)$.
   b – Montrer que pour tout $\lambda \geq 1$, on a $0 \leq S(\lambda) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

B – Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $[-1, +\infty[$ par $f_n(x) = \sqrt{1+x}\, e^{-\frac{x}{n}}$.
On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.

2) a – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la courbe $\mathscr{C}_n$ admet une tangente horizontale en un point M_n.
   b – On désigne par α_n l'abscisse de M_n . Etudier la nature de la suite (α_n).

3) Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

4) On pose $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}\,dx$ et on désigne par (A_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par

   $A_n = \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx$.

   a – Calculer I .

   b – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $1 - e^{\frac{1}{n}} \leq e^{-\frac{1}{n}} - 1$.

   c – En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$, $| e^{-\frac{x}{n}} - 1 | \leq e^{\frac{1}{n}} - 1$.

   d – Montrer que $| A_n - I | \leq \frac{4}{3}\sqrt{2}\,(e^{\frac{1}{n}} - 1)$.

   e – En déduire que la suite (A_n) est convergente et donner sa limite.