Mr Gharbi	Sujet de révision n° 1
Section : MATHEMATHIQUES	Session : 2021

Exercice n° 1 : (temps estimé : 40 min)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

1) n est un entier relatif non nul

Si $(3n) \wedge (3^2 \times 5^2 \times 11) = 33$ alors n est divisible par 3

2) a est un entier relatif

Si $a^2 \equiv 1(mod\ 12)$ alors a et 12 sont premiers entre eux

3) n est un entier naturel, le chiffre des unités de l'entier $N = 1 + 3^{5n} + +3^{6n}$ est égal à 1 pour $n = 4k + 2\ \ (k \in \mathbb{N})$

4) a et b sont deux entiers naturels non nuls, p est un nombre premier strictement supérieur à 2
On pose $d = a \wedge b$ et $m = a \vee b$

Si $m + 2d = p$ alors a et b sont premiers entre eux

Exercice n° 2 : (temps estimé : 45 min)

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On désigne par I, K, M et N les points d'affixes respectives $1 + i$, $2 + 2i$, $2(1 + e^{i\alpha})$ et $2(i - e^{i\alpha})$ avec $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

1) Déterminer et construire Γ l'ensemble des points M lorsque α décrit $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

2) a) Vérifier que I est le milieu de $[MN]$

b) Déterminer alors et construire l'ensemble Γ' des points N lorsque α décrit $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

3) a) Montrer que pour tout $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, le quadrilatère $OMKN$ est un parallélogramme

b) Montrer que pour tout $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du parallélogramme $OMKN$ est égale à $4\left(1 + \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

c) Déterminer la valeur de α pour laquelle $\mathcal{A}(\alpha)$ est maximale

d) Pour la valeur de α trouvé, montrer que $OMKN$ est un losange

Exercice n° 3 : (temps estimé : 45 min)

Soit $AFED$ un carré de centre O et de côté 4 cm tel que $(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On désigne par B et I les symétriques respectifs de A et O par rapport à (EF)

1) a) Soit r la rotation définie par $r(F) = E$ et $r(E) = D$. Préciser l'angle et le centre de r.

b) Soit $f = roS_{(OI)}$. Montrer que f est une symétrie orthogonale d'axe (OE)

2) Soit $r' = t_{\vec{OI}} o r^{-1}$

a) Montrer que r' est une rotation dont on précisera l'angle

b) Déterminer $r'(O)$. En déduire que F est le centre de r'

3) On désigne par g l'antidéplacement tel que défini par $g(D) = F$ et $g(O) = I$

a) Montrer que g est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite

b) Soit M un point du plan. Montrer que $g(M) = r'(M)$ si et seulement si $f(M) = M$

c) En déduire l'ensemble des points M tel que $g(M) = r'(M)$

Exercice n° 4 : (temps estimé : 75 min)

A) Soit g la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = -\ln(1 + \sin(x))$

1) a) Dresser le tableau de variation de g

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à préciser

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et que $(g^{-1})'(x) = \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = \frac{-1}{\sqrt{2e^{x}-1}}$

2) a) Dresser le tableau de variation de φ puis tracer sa courbe ζ_φ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par ζ_φ et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = \ln(2)$

B) I) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{-x\ln(x)}{1+x^2} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$ puis étudier le signe de $f(x)$ sur $[0,+\infty[$

2) a) Montrer que $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ pour tout $x > 0$

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$

c) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $f'(\alpha) = 0$ puis déduire que $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$

II) Soit F une fonction définie sur $[0,+\infty[$ et ζ_F sa courbe représentative telle que :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

1) a) Vérifier que pour tout réel $t \geq 1$ on a : $\frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$

b) Montrer que pour tout $x \geq 1$ on a : $F(1) - \frac{1}{2}ln^2(x) \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}ln^2(x)$

c) Calculer puis interpréter graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$$

2) a) Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ puis calculer $F'(x)$

b) Etudier les variations de F sur $[0,+\infty[$

III) 1) a) Montrer que $-tln(t) \leq \frac{1}{e}$ pour tout $t > 0$

b) Montrer que $f(t) \leq \frac{1}{e}$ pour tout $t \geq 0$ et en déduire que $F(x) < x$ pour tout $x > 0$

2) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 \in]0,1[\\ U_{n+1} = F(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que $U_n \in]0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite

Mr Gharbi	Sujet de révision n° 2
Section : MATHEMATHIQUES	Session : 2021

Exercice n° 1 : (temps estimé : 35 min)

I) Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A tout point M d'affixe z non nul on associe le point M' d'affixe $z' = \sqrt{2} - \frac{1}{z}$

1) Déterminer l'ensemble des points M tel que $z' = z$
2) Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'| = \sqrt{2}$
3) a) Montrer que si $|z| = 1$ alors $z' - \sqrt{2} = -\bar{z}$
   b) En déduire l'ensemble des points M' lorsque M décrit le cercle de centre O et de rayon 1

II) 1) Déterminer les racines cubiques de $(-2+2i)$

2) a) Vérifier que $1 - e^{i\theta} = \dfrac{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{e^{-i\frac{\theta}{2}}}$

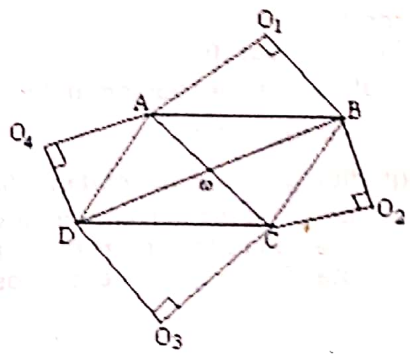
b) Montrer que pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$ on a :

$$\frac{\sqrt{2}\,z-1}{z} = \sqrt{2}e^{i\theta} \text{ si et seulement si } z = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + i\cot an\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

3) En déduire les solutions de l'équation $\left(\sqrt{2}z-1\right)^3 = (-2+2i)z^3$

Exercice n° 2 : (temps estimé : 50 min)

Dans la figure ci-contre $ABCD$ est un parallélogramme de centre . Les triangles BO_1 , BCO_2 , CDO_3 et DAO_4 sont des triangles rectangles et isocèles de sommets principaux respectifs O_1 , O_2 , O_3 et O_4



On suppose que le plan est orienté dans le sens direct et que $\left(\widehat{\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1B}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On désigne par R_1 , R_2 , R_3 et R_4 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs O_1 , O_2 , O_3 et O_4

1) a) Déterminer $R_2 o\, R_1(A)$, $R_3 o\, R_2(B)$ et $R_4 o\, R_3(B)$
   b) Montrer que les applications $R_2 o\, R_1$, $R_3 o\, R_2$ et $R_4 o\, R_3$ sont toutes égale à une application f que l'on déterminera
2) a) Montrer que $R_3(R_2(O_1)) = R_2(O_1)$ et déterminer $f(O_1)$
   b) Montrer que $f(O_2) = O_4$
   c) Déterminer la nature du quadrilatère $O_1 O_2 O_3 O_4$
3) Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$. On pose $g = R_2 o S_\Delta$
   a) Déterminer $g(A)$ et $g(O_1)$
   b) Déterminer la nature de g
   c) Construire le point $\omega' = g(\omega)$ et déterminer les éléments caractéristiques de g

Exercice n° 3 : (temps estimé : 50 min)

A) Soit m un entier naturel

1) Montrer que m est impair si et seulement si $m^2 \equiv 1(mod 8)$

2) Montrer que m est pair si et seulement si $m^2 \equiv 0(mod 8)$ ou $m^2 \equiv 4(mod 8)$

B) On se propose d'étudier l'existence des triplets d'entiers naturels (x, y, z) vérifiant l'équation (E): $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1(mod\ 2^n)$

1) Pour $n = 2$, vérifier que le triplet $(1, 3, 5)$ est solution de (E)

2) On suppose que $= 3$. En utilisant les restes modulo 8 de m^2, montrer que : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1(mod\ 8)$ n'a pas de solution

3) On suppose que $n > 3$

a) Justifier que s'il existe un triplet d'entiers naturels (x, y, z) vérifiant l'équation (E) alors x , y et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs

b) On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1(mod\ 4)$

c) On suppose que x , y et z sont impairs. Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3(mod\ 8)$

d) Conclure

Exercice n° 4 : (temps estimé : 90 min)

A) Soit f la fonction définie sur $\Re$ par $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$. On désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité 4cm)

1) Montrer que la fonction f est paire

2) a) Montrer que pour tout $x \in \Re$, $f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$ puis dresser le tableau de variation de f

b) En déduire que pour tout $x \in \Re$ on a : $0 < f(x) \leq \frac{1}{4}$

c) Tracer la courbe ζ

3) Soit g la restriction de f sur $[0, +\infty[$

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]0, \frac{1}{4}]$

b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in]0, \frac{1}{4}]$

c) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $[0, +\infty[$ une solution unique $0 < \alpha < \frac{1}{4}$

d) Tracer la courbe ζ' de g^{-1} dans le même repère

e) Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan limitée par ζ, ζ' et les axes des coordonnées

B) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $f^n(t) = [f(t)]^n$ et on pose la fonction F_n définie sur $\Re_+$ par :

$$F_n(x) = \int_0^x f^n(t)\, dt$$

1) a) Montrer que pour tout $t \geq 0$ on a : $e^t \leq 1 + e^t \leq 2e^t$ puis déduire que $\frac{1}{4}e^{-t} \leq f(t) \leq e^{-t}$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$ on a : $\frac{1}{n4^n}(1 - e^{-nx}) \leq F_n(x) \leq \frac{1}{n}(1 - e^{-nx})$

2) a) Montrer que la fonction F_n est croissante sur $[0, +\infty[$ et que $F_n(x) \leq \frac{1}{n}$ pour tout $x \geq 0$

b) En déduire que F_n admet une limite finie I_n lorsque x tend vers $+\infty$

c) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{n4^n} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$ et en déduire la limite de la suite (I_n)

3) Calculer $F_1(x)$ pour tout $x \geq 0$. En déduire I_1

4) a) Montrer que pour tout $t \geq 0$ on a : $2f'(t)F_1(t) = 4f^2(t) - f(t)$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $2f^{n-1}(t)f'(t)F_1(t) = 4f^{n+1}(t) - f^n(t)\ \ \forall t \geq 0$

5) a) Montrer en utilisant une intégration par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$:

$$\int_0^x f^{n-1}(t)f'(t)F_1(t)\, dt = \frac{f^n(x)F_1(x)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^x f^{n+1}(t)\, dt$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$: $2f^n(x)F_1(x) = (4n + 2)F_{n+1}(x) - nF_n(x)$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $(4n + 2)I_{n+1} = nI_n$ et que $I_n = \frac{(n-1)!}{2^n \times 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}$ Fin