Exercice 4 (5 pts)

1. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(x)=(2x-1)e^{2x}+1$.

   Dresser le tableau de variation de φ. En déduire le signe de $\varphi(x)$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{x} \text{ si } x>0 \\ f(0)=2 \end{cases}$

   a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   b. Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.

   c. En déduire le sens de variation de f.

3. Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x)=\displaystyle\int_1^{\ln x} f(t)\,dt$.

   Montrer que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $g'(x)=\dfrac{x^2-1}{x\ln x}$.

4. On pose $h(x)=\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$, $x>1$.

   a. Vérifier que pour tout $x>1$, $h(x)=\dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_0^{\ln x} f(t)\,dt$.

   b. Soit $x>1$, Montrer qu'il existe $c\in[0,\ln x]$ tel que $h(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}f(c)$.

   c. En déduire que g est dérivable à droite en 1 et déterminer $g'_d(1)$.

5. a. Montrer que pour tout $x\geq e$, $g(x)\geq\displaystyle\int_1^{\ln x}\frac{2t-1}{t}\,dt$.

   b. Dresser le tableau de variation de g. (On ne cherchera pas à calculer $g(1)$).

Exercice 4 (6 pts)

I/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
2. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in]-1,1[$.

II/ Soit x un réel positif. On pose $I_0(x)=x$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n(x)=\displaystyle\int_0^x[f(t)]^n\,dt$.

1. Calculer $I_1(x)$.

2. a. Montrer que pour tout $n\geq1$, $0\leq I_n(x)\leq x[f(x)]^n$.

   b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x)$.

3. a. Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=1-[f(x)]^2$.

   b. En déduire que pour tout $n\geq0$, $I_{n+2}(x)=I_n(x)-\dfrac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1}$.

   c. Montrer alors que pour tout $n\geq1$, $I_{2n}(x)=x-\left[f(x)+\dfrac{1}{3}(f(x))^3+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}(f(x))^{2n-1}\right]$.

   d. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\times3^3}+\dfrac{1}{5\times3^5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)3^{2n-1}}$.

de son parc de logements pendant l'été. On sait que 20% des chaudières sont sous garantie.
Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de 0,01.
Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de 0,1.
On appelle G l'événement suivant :« la chaudière est sous garantie ».

1°/ Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « la chaudière est sous garantie et est défectueuse ».

D : « la chaudière est défectueuse ».

2°/ Dans un logement, la chaudière est défectueuse. Montrer que la probabilité qu'elle soit sous garantie est $\frac{1}{41}$.

3°/ Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie.
Il coûte 80 dinars si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse.
Il coûte 280 dinars si la chaudière n'est plus sous garantie et est défectueuse.
On note X la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière.
Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

4°/ Au cours de la période de contrôle, on a trouvé cinq chaudières défectueuses.
Quelle est la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles soit sous garantie ?

Exercice 4 (8 points)

I / Soit f_0 la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f_0(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x > 0 \\ f_0(0) = 1 \end{cases}$

On désigne par (C_0) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ Montrer que f_0 est continue à droite en 0.

2°/ Soit x un réel strictement positif.

Pour tout $t \in [0,+\infty[$, on pose $g(t) = \left(\dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}\right)t^2 - e^t + t + 1$.

a) Calculer g (0) et g (x). En ~~déduire~~ admet qu'il existe un réel $c \in]0, x[$ tel que $\dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = \dfrac{e^c - 1}{2c}$.

b) Montrer alors que f_0 est dérivable à droite en 0.

3°/ Soit φ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(x) = 1 + (x-1)e^x$.

a) Dresser le tableau de variation de φ.

b) En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $[0,+\infty[$.

4°/ a) Dresser le tableau de variation de f_0 sur $[0,+\infty[$.

b) Tracer (C_0).

II / Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur l'intervalle $]0,+\infty[$ la fonction f_n par $f_n(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} + n \ln x$.

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ Dresser le tableau de variation de f_n.

2°/ Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $]0,+\infty[$.

3°/ Montrer que l'équation $f_1(x) = 0$ admet $]0,+\infty[$ dans une unique solution α_1 et que $0,2 < \alpha_1 < 0,4$.

4°/ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $f_n(\alpha_1) < 0$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, il existe un seul réel $\alpha_n \in [\alpha_1, 1]$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

5°/ a) Justifier que pour tout $x \in]0, 1]$, $\dfrac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(\alpha_n) \geq \dfrac{1-e}{n}$ puis que $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

c) Montrer alors que la suite (α_n) est convergente et déterminer sa limite.

6°/ Construire les courbes (C_1) et (C_2).

A - Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie dans $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_n(x) = (x - 1)^n \operatorname{Log} x$$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $R = (o, \vec{i}, \vec{j})$.

1) On pose, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi_n(x) = n \operatorname{Log} x + 1 - \frac{1}{x}$

a - Etudier les variations de φ_n.

b - Calculer $\varphi_n(1)$ et en déduire le signe de $\varphi_n(x)$ pour tout x strictement positif.

2) a - Etudier les variations de f_n et dresser, suivant la parité de n, son tableau de variation.

b - Tracer, dans le même repère R, les courbes (C_1) et (C_2) en précisant les positions relatives de ces deux courbes.

3) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (C_1) et (C_2).

B - Dans cette partie on se propose d'étudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

1) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \int_1^2 f_n(x)\,dx$.

Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $(n+1)\,u_n = \operatorname{Log} 2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}\,dx$

En déduire

a - la relation : $\frac{1}{2(n+2)} \leqslant \operatorname{Log} 2 - (n+1)\,u_n \leqslant \frac{1}{n+2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

b - la limite de $(n+1)u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2) On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et tout réel $x > 0$.

$$S_n(x) = 1 - (x-1) + \ldots + (-1)^n (x-1)^n$$

a - Montrer que $S_n(x) = \frac{1}{x} - (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^{n+1}}{x}$

b - En déduire, en utilisant la première question de la partie B, que pour n élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\operatorname{Log} 2 - v_n = (-1)^{n+1} \left[\operatorname{Log} 2 - (n+1)\,u_n\right]$$

3) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$