Série de révision n° : 3

Mathématiques

2020 - 2021.

Niveau : Bac Math

Dhiaf Hammadi

Exercice 1: (4 points)

Une compagnie d'assurance automobile fait un bilan des frais d'intervention, parmi ses dossiers d'accidents de la circulation.
85 % des dossiers entraînent des frais de réparation matérielle.
20 % des dossiers entraînent des frais de dommages corporels.
12 % des dossiers entraînant des frais de réparation matérielle entraînent aussi des frais de dommages corporels.
Soit les évènements suivants :
R : le dossier traité entraîne des frais de réparation matérielle.
D : le dossier traité entraîne des frais de dommages corporels.
1) En utilisant les notations R et D, exprimer les trois pourcentages de l'énoncé en termes de probabilités ; les résultats seront donnés sous forme décimale.
2) Calculer la probabilité pour qu'un dossier :

a) entraîne des frais de réparation matérielle et des frais de dommages corporels.

b) entraîne seulement des frais de réparation matérielle.

c) entraîne seulement des frais de dommages corporels.

d) n'entraîne ni frais de réparation matérielle ni frais de dommages corporels.

e) entraîne des frais de réparation matérielle sachant qu'il entraîne des frais de dommages corporels.

3) On constate que 40 % des dossiers traités correspondent à des excès de vitesse et parmi ces derniers 60 % entraînent des frais de dommages corporels.

a) On choisit un dossier, quelle est la probabilité pour que ce dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels ?

b) On choisit cinq dossiers de façon indépendante. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels.

Exercice 2: (3 points)

1) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes modulo 7 de 2^n et 3^n.
2) En déduire le reste modulo 7 de $2019^{2021} - 1426^{1426}$

3) Soit n un entier naturel, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{3n} \left(2^k - 4\right)$.

Déterminer les entiers naturels n pour lesquels 7 divise S_n.
4) Déterminer les couples d'entiers naturels (x , y) tels que $2^x + 2^y \equiv 2 \pmod 7$.

Dhiaf Hammadi

Exercice 3: (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.
On donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = -2i$ et $z_C = 2 + 2i$.
Soit n un entier naturel non nul et φ_n l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M_n d'affixe $z_n = e^{i\frac{\pi}{n}}\,\overline{z} + 2$.

1) Montrer que φ_n est une isométrie.

2)a) Déterminer les images des points O, A et B par φ_2 pour n = 2.

b) Déduire que φ_2 est un antidéplacement.

c) Montrer que φ_2 est une symétrie glissante dont on précisera les éléments caractéristiques.

3) Dans cette question M un point du cercle trigonométrique de centre O.

On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k M_{k+1}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul k, $M_kM_{k+1} = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2k(k+1)}\right)$.

b) Montrer que $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $\dfrac{x\sqrt{2}}{2} \leqslant \sin x \leqslant x$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) \leqslant sin\left(\dfrac{\pi}{2k(k+1)}\right) \leqslant \left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

c) Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \leqslant S_n \leqslant \pi\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$

d) Montrer que la suite (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 4: (7 points)

A) Soit f la fonction définie sur $I = [0, +\infty[$ par : $f(0) = 0$ et $\forall x > 0$, $f(x) = x^3 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

On désigne par (C_f) la courbe de f dans un repère ortonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1)a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \leq \dfrac{1}{x}$.

c) En déduire que f est dérivable à droite en 0.

2)a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que
$\forall x > 0$, $f'(x) = 3x^2\left(ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{3(1+x)}\right)$

b) En déduire que f est strictement croissante sur I.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x > 0$.

a) Vérifier que $\forall x > 0$, $g'(x) = 2x\left(ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{2(1+x)}\right)$, en déduire que g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$.

c) En déduire que les seules solutions de l'équation $f(x) = x$ sont 0 et α

4)a) Tracer la courbe

b) Montrer que f réalise une bijection I vers I. On note f^{-1} sa fonction réciproque.

B) On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $0 < u_0 < \alpha$ et $\forall n \in$ IN, $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$

1) Montrer par récurrence que $\forall n \in$IN, $0 < u_n < \alpha$.

2)a) Montrer que $g(]0, \alpha[) =]0, 1[$.

b) En déduire que la suite (u_n) est strictrment croissante.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente est déterminer sa limite.

C) Soit F la fonction définie sur $I = [0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$.

1)a) Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de $F(x)$.

b) Montrer que F est dérivable sur I et déterminer sa fonction dérivée F'.

2)a) Montrer que $\forall x \geq 1$, $F(x) \leq (1 - x)\ln 2$.

b) En déduire la limite de F en $+\infty$.

3)a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall x > 0,\ F(x) = \frac{ln2}{4} - \frac{x^4}{4} ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\int_x^1 \frac{t^3}{1+t}dt.$$

b) Calculer $\int_x^1 \frac{t^3}{1+t}dt$, pour $x > 0$.

c) En déduite que $\forall x > 0$, $F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}ln(1+x) - \frac{x^4}{4}ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

d) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$. En déduire la valeur de $\int_0^1 f(t)dt$.

4) Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

a) Montrer que $\forall n \in$IN* et $\forall k \in \{0, 1, ..., n-1\}$,

$$-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq -\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

b) En déduire que $\forall$ n $\in$IN*, $-\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq -\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

c) Montrer que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

Dhiaf Hammadi