Questions A : Arithmétique

1) On considère deux entiers naturels non nuls p et q tels que $p \wedge q = 1$.

Montrer que le système S : $\begin{cases} x \equiv a \pmod{p} \\ x \equiv b \pmod{q} \end{cases}$ admet des solutions dans Z

2) a)A l'aide de l'identité de Bézout montrer que $2015 \wedge 1436 = 1$.

b)Montrer que : $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{13} \\ x \equiv 1 \pmod{31} \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod{2015}$

c)Résoudre alors dans Z : $x^{1439} \equiv 1436 \pmod{2015}$

3) On considère dans Z x Z, l'équation (E) : $5x - 3y = 11$.

a)Vrai ou faux : L'ensemble de solution est {(33k + 1, 55k-2) où k est un entier relatif}.

b)Résoudre dans ZxZ le système $\begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ x \wedge y = 11 \end{cases}$

4) Déterminer selon l'entier naturel n , les restes possibles des entiers 7^n, 5^n et 4^n modulo 8.

Questions B : Espace

Indiquer la bonne réponse

1/Soit P et P' deux plans strictement parallèles de l'espace. A un point n'appartenant pas ni à P, ni à P'.

a)Il existe une seule homothétie de centre A, transformant P en P'.
b)Il existe exactement deux homothéties de centre A, transformant P en P'.
c)Il existe plus que trois homothéties de centre A, transformant P en P'.

2/ la transformation f de l'espace qui à tout point $M(x,y,z)$ associe le point $M'(x',y',z')$ tel que

$\begin{cases} x' = -2x + 2 \\ y' = -2y - 3 \\ z' = -2z + 1 \end{cases}$ est :

a)L'homothétie de centre le point $I\left(\frac{2}{3}, -1, \frac{1}{3}\right)$ et de rapport -2

b)L'homothétie de centre le point $I(2,-3,1)$ et de rapport -2

c) La translation de vecteur $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

3/ P et Q deux plans parallèles et D une droite sécante au plan P

Le nombre de translations t telle que t(P) = Q et t(D) = D est : a) 1 b) 2 c) plus que 3

4/S une sphère de centre A et de rayon 3 et D une droite sécante à S

Le nombre d'homothéties h de centre A telle que l'image de D est une droite D' tangente à S est : a)2 b) 3 c) plus que 4

5/A et B deux points distincts de l'espace.

L'ensemble des points M de l'espace tel que :$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{O}$ est :

a) la droite (AB) b) la sphère de diamètre [AB] c) l'ensemble vide .

6/ A et B deux points distinct .S sphere de centre A et de rayon 3 et S' sphere de centre B et de rayon 5 . Le nombre d'homothéties h qui transforme S en S' est : a) 2 b) 4 c) plus que 5 .

Exercice 1 : L'espace est muni d'un repère orthonormé direct (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

Soit A (6, 0, 0) , B (0, –6, 0) et C (0, 0, 3) etsoit S la sphère : $x^2 + y^2 + z^2 - x + y - 2z = 12$

1) a) Déterminer une équation du plan P passant par A, B et C.
b) Déterminer le centre I de S et calculer son rayon.
c) Montrer que S et P sont sécants suivant un cercle dont on déterminera le centre H et le rayon.

2) a) Vérifier que le point K (–1, 1, –2) est un point de S.
b) Déterminer une équation du plan Q tangent à S en K
c) Vérifier que P et Q sont parallèles.

3) Soit h une homothétie de centre I qui transforme P en Q.
Montrer que h à pour rapport [illegible] ation de la sphère S' image de S

Exercice 2 : On considère les points A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 3).

1) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2). a) Calculer le volume du tétraèdre OABC

b) Calculer la distance du point O au plan (ABC). En déduire l'aire du triangle ABC.

c) Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

d)Montrer que le plan (OAB) coupe la sphère de diamètre [BC] suivant un cercle que l'on précisera.

3)

a) Déterminer une équation de chacun des plans médiateurs de [OA] , [OB] et [OC]. puis déterminer S_1 la sphère circonscrite au tétraèdre OABC.

b) On considère une homothétie h de centre O et de rapport k un réel non nul . Et une sphère S de centre I(4 , 4 , 4) et de rayon 4

- Vérifier que S est tangente aux 3 plans (OAB) , (OAC) et (OBC).
- Définir la sphère S' image de S par h.
- Déterminer les réels k pour que S' soit tangente au plan (ABC). En déduire S_2 la sphère tangente intérieurement au tétraèdre OABC S_3 la sphère tangente extérieurement au tétraèdre OABC

Questions C : Conique

1) L'espace est muni d'un repère orthonormé direct (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)
ABC un triangle et I le milieu de [AB]
Déterminer l'ensemble des points M du plan (ABC) tels que $\|\overrightarrow{IM} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{CM}\|$

2) Déterminer, suivant les valeurs du réel m, la nature de l'ensemble $C_m : mx^2 + y^2 = m$

3) Déterminer la nature de chacun des ensembles suivants :

a) L'ensemble des points M(z = x + i y) tels que $\left|\frac{1}{2}z - \bar{z}\right| = 1$.

b) L'ensemble des points M(z = x + i y) tels que $|z - 1 + i| = \sqrt{5}\ |x + 2y - 1|$.

c) L'ensemble décrit par le point M(2 cos(θ) −1; 1 + 3 sin (θ))

d) L'ensemble décrit par le point M($e^t - e^{-t} + 3$, $\frac{e^t - e^{-t}}{2} - 1$)

4) Donner une équation de l'hyperbole H de centre O , de sommet S(3 , 0) et de foyer F(5 , 0) .

5) Donner une équation de la parabole de foyer F(2,0) et de directrice D : x = - 4 .

6) Calculer l'aire de partie du plan limitée par l'ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

7) Déterminer par leurs équations les tangentes à l'ellipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ passants par le point A(0 ,$\sqrt{5}$)

Exercice : 1 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (o,$\vec{i}$,$\vec{j}$).

Soit E l'ensemble des points M d'affixe z = x + i y vérifiant $|z - 1 - i|^2 = \left(\frac{x+y-4}{2}\right)^2$.

1) Montrer que E est une conique de directrice la droite D : y = -x + 4 dont on précisera son foyer et son excentricité.

2) Soit f la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle (- $\frac{\pi}{4}$).

a) Ecrire l'expression complexe de la similitude f.

b) Exprimer alors les coordonnées x et y de M en fonction de X et Y coordonnées du point M' image de M par f.

c) Déduire l'équation réduite de la conique f(E).

d) Caractériser alors la conique E

Exercice 1 :

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan.
Soit E la courbe d'équation $12x^2 + 16y^2 + 12x - 9 = 0$

1) a) Montrer que E est une ellipse. Préciser son excentricité, son centre et ses sommets principaux
b) Montrer que O est un foyer de E.
c) Tracer E.

2) Soit M un point de E d'abscisse x. On pose $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \alpha\,[2\pi]$ où $\alpha \in]-\pi, \pi[$

a) Montrer que $OM = \frac{3-2x}{4}$

b) En déduire que $OM = \frac{3}{2(2+\cos\alpha)}$

3) La droite (OM) recoupe E en un point N.

a) Montrer que $MN = \frac{6}{4-\cos^2\alpha}$

b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles MN est minimale.

Exercice 2 : cocher la bonne réponse

1) Soient a, b et c trois entiers non nuls.

$\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \wedge bc = 1.$

a/ Faux b/ Vrai

2) L'espace E est muni d'un repère orthonormé ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

Quand θ varie dans IR, le point M $(1 + cos^2(\theta), 2 - sin^2(\theta), \cos(2\theta))$ décrit.

a/ un Segment b/ une droite c/ un plan

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur IR_+ par :

$f(x) = e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$.

On note C : la courbe représentative de la fonction f dans un plan P rapporté à un repère orthonormé ($O, \vec{i}, \vec{j}$).

I/

1) Soit h la fonction définie sur IR_+ par $h(t) = \frac{e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - 1}{x} t - e^{\sqrt{t}} + \sqrt{t} + 1$.

a/ Soit x > 0 ; montrer qu'il existe un réel $a \in]0, x[$ tel que $h'(a) = 0$.

b/ Déduire que f est dérivable à droite en 0.

2) a/ Dresser le tableau de variations de f.

b/ Construire la courbe C de f.

II/ Soit φ la fonction définie sur IR par: $\varphi(x) = \int_0^{x^2} e^{\sqrt{t}}\, dt$.

1) a/ Montrer que φ est dérivable sur IR et que pour tout $x \in IR$ on a: $\varphi'(x) = 2xe^{|x|}$.

b/ En déduire que pour tout $x \in IR$: $\varphi(x) = 2\int_0^x te^{|t|}\, dt$.

c/ Expliciter $\varphi(x)$ pour $x \geq 0$.

d/ En déduire l'aire A de la partie du plan limitée par (C) et les droites
x = 0, x = 1 et y = 0.

2) Soit g la fonction définie sur IR_+ par $g(x) = e^{\sqrt{x}}$.
Soit $n \in IN^*$ et
k un entier compris entre 0 et $(n-1)$.

Montrer que : $\frac{1}{n} g(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{1+k}{n}} g(t)dt \leq \frac{1}{n} g(\frac{1+k}{n})$;

3) On pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} g(\frac{k}{n})$ où $n \in IN^*$.

a/ Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a :
$2 \leq S_n \leq 2 + \frac{e}{n}$.

b/ Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

4) Soit $n \in IN$ et $a_n = \int_0^1 t^n e^{\sqrt{t}} dt$ et $a_0 = -\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{t}}}{1+t} dt$.

a/ Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

b/ Montrer que

$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p a_p = -\varphi(1) + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t} e^{\sqrt{t}} dt$.

5) a/ Montrer que $\left|\sum_{p=0}^{n} (-1)^p a_p + \varphi(1)\right| \leq a_{n+1}$.

b/ En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n} (-1)^p a_p\right)$.

Exercice 4 : Questions indépendantes

1)Résoudre dans Z :

$$\begin{cases} 4x \equiv 3\ [23] \\ 3x \equiv 5\ [29] \end{cases}$$

2) Calculer chacune des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln(1+\ln(x))}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-\sqrt[3]{x})}{\ln(x^2-x)}$

3) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\ln(1+\cos(x))\, dx$.

Exercice 3 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I. 1) Montrer que pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$.

2) a) Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = x - 2\ln x - \ln(1 + \dfrac{1}{x^2})$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Donner une équation de la tangente Δ à la courbe (C) au point O.

b) Donner la position relative de la droite Δ et la courbe (C).

c) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite Δ et la courbe (C).

II. Soit G la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}\, dt$

1) a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa fonction dérivée.

b) En déduire que pour tout x appartenant à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ $G(x) = x$.

c) Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt$.

2) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = \ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

b) En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

Exercice 1 (4 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

A/ On désigne par (C_1) l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y^2 - 2\sqrt{3}y - 2x = 0$.

Déterminer la nature de (C_1). Donner les éléments caractéristiques de (C_1) et la construire.

B/ 1. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 2 et F un point de $\mathscr{C}$.

a. Justifier que la parabole de foyer F et de directrice $\Delta : x = -2$ passe par O.

b. Tout point de $\mathscr{C}$ peut-il être le foyer d'une parabole de directrice Δ passant par O ?

2. On se propose de déterminer l'ensemble (E) des sommets des paraboles de directrice $\Delta : x = -2$ et de foyer un point du cercle $\mathscr{C}$ privé du point $A(-2, 0)$.

Soit $M(x, y)$ un point de (E) et $F(a, b)$ le foyer de la parabole de sommet M et de directrice $\Delta : x = -2$.

a. Déterminer x et y en fonction de a et b.

b. En déduire que $(x+1)^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$.

c. Conclure et tracer (E).

Exercice 2 (3 pts)

L'annexe représente un triangle ABC.

On désigne par S la similitude directe de centre A qui transforme B en C et par h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{4}$.

Soit $f = h \circ S$.

1. Montrer que f admet un seul point invariant Ω.

2. a. Construire les points I et J images respectives de A et B par f.

b. Construire le point K image de I par f.

3. a. Construire l'ensemble $\Gamma_1 = \left\{M \in P \text{ tel que } \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MI}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]\right\}$.

b. Soit $\Gamma_2 = \left\{M \in P \text{ tel que } \left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MJ}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]\right\}$.

Vérifier que I appartient à Γ_2 et construire Γ_2.

c. En déduire une construction de Ω.

Exercice 3 (3 pts)

Pour tout entier naturel n on pose $a_n = n7^n + (n+1)7^{n+1} + (n+2)7^{n+2}$.

1. Déterminer, suivant l'entier naturel n, le reste modulo 19 de 7^n.

2. En déduire, suivant l'entier naturel n, le reste modulo 19 de a_n.

3. a. Soit p un entier naturel tel que $p \equiv 0 \pmod 3$.

Montrer que $a_p + a_{p+1} + a_{p+2}$ est divisible par 19.

b. En déduire le reste modulo 19 de $\sum_{i=0}^{100} a_i$.

Exercice 4 (6 pts)

I/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

2. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in]-1,1[$.

II/ Soit x un réel positif. On pose $I_0(x)=x$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n(x)=\int_0^x[f(t)]^n dt$.

1. Calculer $I_1(x)$.

2. a. Montrer que pour tout $n\geq 1$, $0\leq I_n(x)\leq x[f(x)]^n$.

 b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x)$.

3. a. Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=1-[f(x)]^2$.

 b. En déduire que pour tout $n\geq 0$, $I_{n+2}(x)=I_n(x)-\dfrac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1}$.

 c. Montrer alors que pour tout $n\geq 1$, $I_{2n}(x)=x-\left[f(x)+\dfrac{1}{3}(f(x))^3+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}(f(x))^{2n-1}\right]$.

 d. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\times 3^3}+\dfrac{1}{5\times 3^5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)3^{2n-1}}$.

Exercice 5 (4 pts)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier f et tracer $\mathscr{C}$.

2. Soit α un réel qui appartient à $]1,+\infty[$. On désigne par $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $y=0$, $x=1$ et $x=\alpha$.

 On désigne par $\mathcal{A}'(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $y=0$, $x=1$ et $x=\dfrac{1}{\alpha}$.

 Montrer que $\mathcal{A}(\alpha)=\mathcal{A}'(\alpha)$.

3. Soit u et v deux réels strictement positifs tels que $u<v$.

 Comparer u^v et v^u dans chacun des cas suivants :

 a. u et v sont deux réels de $]0,e]$.

 b. u et v sont deux réels de $[e,+\infty[$.

4. a. Soit $a\in]1,e[$. Justifier qu'il existe un seul réel $b\in]e,+\infty[$ tel que $\dfrac{\ln a}{a}=\dfrac{\ln b}{b}$.

 b. Déterminer l'ensemble des couples (p,q) d'entiers naturels non nuls tels que $p\neq q$ et $p^q=q^p$.

• Pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.
Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.
On désigne par: S l'événement l'alevin a survécu jusqu'a l'âge de trois mois.
R l'événement l'alevin devient rouge.
G l'événement l'alevin devient gris.
1) Etablir l'arbre de probabilité

2) Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est à-dire à l'âge de deux mois.
a) Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.
b)Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.
c) Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

3)L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 Dinar si le poisson est rouge, 0,25 Dinar s'il est gris et perd 0,10 Dinar s'il ne survit pas. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique,