Exercice 1:

1) Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes : $\bar{z}-3iz-3+6i=0$

2) Soit A(4-2i) Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.

3) Soit D(2i)

a)Représenter l'ensemble E des points M(z)$\neq 2i$ tels que arg(z-2i)=$\frac{\pi}{4}$+2kπ

b) Représenter l'ensemble F des points M(z) tels que z=2i+2$e^{i\theta}$;$\theta\epsilon IR$

4) A tout point M(z$\neq -2$) associe le point M'(z') telle que z'=$\frac{z-1}{\bar{z}+2}$

Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que $|z'|=1$

Exercice 2 : (7 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur]0; +∞[par: f(x) = (1-lnx)².

1) Etudier les variations de f.

2)a) Soit g la restriction de f à l'intervalle [e, +∞ [.
Montrer que g réalise une bijection
De [e, +∞ [sur [0, +∞ [.

b) Démontrer que pour tout x de [0, +∞ [,
on a: $g^{-1}(x)=e^{1-\sqrt{x}}$

3) Tracer la courbe (C) de f et celle (C') de g^{-1} dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$

Partie B

Pour tout n$\in$ IN^* on pose: $I_n=\int_1^e(1-\ln x)^2\,dx$

1) Justifier l'existence de I_n.

2) Calculer I_1

3) En utilisant une intégration par partie, démontrer que: $\forall n\in N^*$: $I_{n+1}=1(n+1)I_n$.

4) On désigne par A et B les points de (C) d'abscisses 1 et e. Soit V le volume du solide de Révolution engendré par la rotation de l'arc AB de la courbe (C) autour de l'axe $(0,\vec{i})$
Calculer V.

5) Montrer que (I_n) est décroissante et que $\forall n\in N^*$ on a : $0\leq I_n\leq\frac{1}{n}$

6) Montrer que (I_n) converge. En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers +∞.

Exercice 3:

Vrai ou Faux

1)soit n$\in$IN, $(\sqrt{3}+i)^n$ est un imaginaire pur ssi :
n ≡ 3 (mod6)

2) x et y sont deux entiers et tel que pgcd(24x,64y)=64 alors x ≡ 0 (64)

3) L'équation : 6x + 18y = 3 admet dans Z x Z : une infinité de solutions

4) Soit n un entier non nul tel que
5n ∧ (3^2x5^3x7)=35 **alors** n≡ 0 (7)

6) g est la similitude indirecte d'écriture complexe :
z' = - 2i$\bar{z}$ +3 , de centre A et d'axe D
Soit D' la perpendiculaire à D en A ,
alors : go$S_{D'}$ est l'homothétie $h_{(A,2)}$

7) Soient a et b deux entiers non nuls tel que a+b et a-b sont premiers entre eux alors a et b sont premiers entre eux.

8) Soit f la transformation qui à M(z) associe M'(z') telle que : z' = 2i$\bar{z}$ – 1 – i et I(1 + i).
f est une similitude indirecte de rapport 2, de centre I et d'axe ∆ : x + 2y – 3 = 0

9) On considère l'équation (E) : 24x – 16y = 8 ;
où x et y sont des entiers relatifs.
Les solutions de (E) sont de la forme :
(x,y) = (3k + 1 ; 2k + 1) , k∈Z.

10) On considère l'équation (E'): x² + 5x – 2 ≡ 0 [17]
Les solutions de (E') sont de la forme :
x = 17k + 13 ou x = 17k + 8 , k∈Z.

11) Soit N = $(22)^{3n+2}+(13)^{3n+1}$;n est un entier naturel, alors: N ≡ 1 [9]

12) La courbe de la fonction f définie par f(x) = ln $\frac{x}{1-x}$ admet un centre de symétrie.

Exercice 3 :

Dans la figure ci-contre, le quadrilatère ABCD est un losange de sens direct, de centre O.
I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [AD] et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement h qui transforme A en B et B en D

b) Caractériser h.

c) Déterminer l'image du triangle ABD par h.

2. Soit h_1 un antidéplacement qui transforme l'ensemble {A, B, D} en l'ensemble {B, C, D} et tel que h_1(A) = C.

a) Déterminer l'image du segment [BD] par h_1.

b) Caractériser alors h_1.

3) Soit h_2 un déplacement qui transforme l'ensemble {A, B, D} en l'ensemble {B, C, D} et tel que $h_2(A) = D$.

a) Montrer que $h_2(D) = C$.

b) Caractériser alors h_2.

<u>Exercice 4 :</u>

Partie A :

Soit g la fonction définie sur **R** par : $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1) Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.

2) Etudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variations.

3) On admet que l'équation g(x) = 0 a exactement deux solutions réelles.

a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.

b) L'autre solution est appelée α.

Montrer que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$.

4) Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs du réel x.

Partie B : Soit f la fonction définie sur **R** par :

$f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$.

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

2) a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et g(x) ont le même signe.

b) Etudier le sens de variation de f .

3) a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{-(\alpha^2+2\alpha)}{4}$, où α est défini dans la partie B.

b. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

4. Etablir le tableau de variations de f .

5. Tracer la courbe (C), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).

<u>Exercice 5 :</u>

E étant l'ensemble des points M(z) tels que :

$$jz^2 + \bar{j}\bar{z} - \frac{10}{3}z\bar{z} + 192 = 0.$$

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(z) on associe le point M'(z') tel que $z' = \frac{1}{3}j^2 z$.

1) Caractériser f.

2) a) Vérifier qu'un point $M'(z') \in f(E)$ si et seulement si $3z'^2 + 3\overline{z'^2} - 10z'\overline{z'} + 64 = 0$.

b) Montrer alors que $x^2+4y^2=16$ est une équation de f(E) puis caractériser f(E).

<u>Exercice 6:</u>

Le plan est orienté. OAB est un triangle rectangle en B de sens direct tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Soit f la similitude directe tels que f(O=O et f(B) = A.

1) Donner une mesure de l'angle de f et montrer que le rapport de f est 2.

2) Soit C = f(A).

a) Montrer que le triangle OCA est rectangle en A de sens direct et que AC = 2 AB.

b)Placer le point C.

3) Soit g la similitude indirecte tel que g(B)=A et g(A)=C. On note I le centre de g.

1) Mque I vérifie $\overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IB}$ puis placer le point I.

2) Soit G le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 2) et H son image par g.

a) Vérifier que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et en déduire que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

b) Montrer que $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{IB}$ puis montrer que G = I * H.

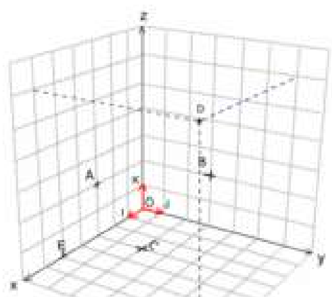
c)Montrer que la droite (GH) est l'axe de g.

<u>Exercice 7</u> <u>(BacFr2007)</u>

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\right)$.

Dans la figure ci-contre ABCD est un tétraèdre tel que $\overrightarrow{OD} = 6\overrightarrow{OI} + 6\overrightarrow{OJ} + 6\overrightarrow{OK}$.

1) a) Préciser les coordonnées de chacun des points A, B, C et E.



b) Vérifier que $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OD}$.

c) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

2)a) Donner une équation cartésienne du plan P = (ABC) ; puis vérifier que E appartient à P.

b) Soit S la sphère de centre $\Omega(1, 1, 1)$ et de rayon $\sqrt{3}$

Montrer que S coupe le plan P suivant un cercle C dont on précisera le centre et le rayon.

3) Soit f l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M(x, y, z) associe le point M'(x', y', z') tel que : $\begin{cases} x' = 3x - 10 \\ y' = 3y \\ z' = 3z \end{cases}$

a)Montrer que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

b) Déterminer f(S) $\cap$ P.

Exercice 8:

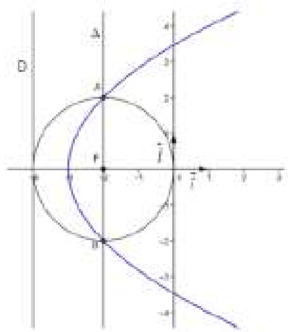
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère la parabole P de Foyer F(-2, 0) et de directrice D : x= - 4. On désigne par Δ la droite parallèle à D passant par F.

On appelle A et B les points d'intersection de Δ et la parabole P. (On a représenté les droites D et Δ, la parabole P et le cercle de diamètre [AB].

1)Soit M un point de la parabole P distinct de A et B. Soit H le projeté orthogonal de M sur Δ.

a)Montrer que MF – MH = 2 ou MF + MH = 2

b)En déduire que le cercle de centre M et de rayon MH est tangent au cercle de diamètre [AB].



2) a)Déterminer le sommet S et le paramètre p de la parabole P.

b)Montrer qu'une équation cartésienne dans (O,$\vec{i}$, $\vec{j}$) de la parabole P est :$y^2=4(x+3)$.

3) Soit m un réel non nul et Dm :y=m(x+2)

La droite Dm coupe la parabole P en deux points G et L. On admet que le point N milieu de [GL] a pour coordonnées N($\frac{2}{m^2} - 2, \frac{2}{m}$)

a)Montrer que le point N varie sur une parabole fixe P' que l'on déterminera.

b)Tracer la parabole P' sur la même figure.

Exercice9 :

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur **N** par :$U_0 = 0$, $U_{n+1} = \frac{2u_n+v_n}{3}$; $V_0 = 1$, $V_{n+1} = \frac{3u_n+2v_n}{5}$

1) Mque pour tout entier naturel non nul n, $U_n \le V_n$.

2) Montrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.

3) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.

4) Soit la suite (W_n) définie sur **N** par :

$W_n = 9U_n + 5V_n$.

a) Montrer que la suite (W_n) est une suite constante.

b) En déduire la limite commune des suites (U_n) et (V_n).

Exercice 10

I/ On considère dans $\mathbf{Z}^2$: (F) : 2x + 5y = 3.

1) Résoudre l'équation (F).

2) Soit (x; y) une solution de (F).

a) Quelles sont les valeurs possibles de PGCD(x; y)?

b) Déterminer les couples (x; y), solutions de (F), tels que PGCD(x; y) = 3.

II/ L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{i}$,$\vec{j}$, $\vec{k}$) .

On considère la droite (Δ) passant par le point A(−3; 1;−3) et de vecteur directeur $\vec{u}$= 2 $\vec{i}$-2$\vec{j}$- $\vec{k}$ et la droite (D) passant par le point B(3; 2; 3) et de vecteur directeur $\vec{v}$= $\vec{i}$ +2$\vec{j}$- 2 $\vec{k}$.

1) Démontrer que les droites (Δ) et (D) sont orthogonales et non coplanaires.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant (Δ) et parallèle à (D).

3) Soit (S) la sphère de centre C(−1; 0;−1) et de rayon 6 et (P) le plan d'équation : 2x + y +2z + 11 = 0.

Montrer que (S) et (P) se coupent suivant un cercle de centre A dont on déterminera le rayon.

Exercice 11:

Soit k un entier ≥ 2.

1)On considère la fonction f_k $définie\ sur$ $]0,+\infty[$ par $f_k(x) = x^k - lnx$

a) Déterminer f'_k.

b) Mque f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à $\frac{1+lnk}{k}$

c) Pour tout réel x > 0, on considère les points $M_k(x, x^k)$ et M(x, lnx). Déterminer la valeur minimale de la distance MM_k.

2) Pour tout k ≥ 2, on pose $u_k = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$.

a) Vérifier que $lnu_k = -\frac{lnk}{k}$ et en déduire la limite de (u_k).

b) Soit A(1, 0) et A_k le point de coordonnées $(u_k, f_k(u_k))$ Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers +∞.

Exercice 12

Soit (E) l'équation: $z^3 + (3 - d^2) z + 2i(1+d^2) = 0$, où d est un nombre complexe donné de module 2.

1)a) Vérifier que 2i est une solution de l'équation (E).

b) Résoudre dans C l'équation (E).

2) Dans le plan complexe P, on considère les points A, B, M, et N d'affixes respectives 2i , -i, -i+d et –i-d.

a) Calculer MN et déterminer le milieu de [MN].

b) En déduire que lorsque d varie dans C, les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera.

c) Dans le cas où AMN est un triangle, montrer que O est le centre de O est le centre de gravité du triangle AMN.

d) En déduire les valeurs de d pour lesquelles le triangle AMN est isocèle de sommet principal A.

Exercice 13

Le plan est orienté dans le sens direct, ABCD est un losange de centre O, I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [AD] et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}$ (2π)

1)a)Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui envoie A en B et I en O

b) Caractériser f

c)Déterminer l'image du triangle ABD par f.

2) Soit g l'antidéplacement qui transforme l'ensemble {A, B, D} en l'ensemble {B, C, D} et tel que g(A)=D

a)Montrer que g(D)=B

b) Caractériser alors g

3) Soit s un antidéplacement qui transforme l'ensemble {A,B,D} en l'ensemble {B,C,D} et et tel que s(A)=C

a)Démontrer que s est une symétrie orthogonale d'axe (BD)

b) Définir les isométries suivantes

f = r(B, $\frac{\pi}{3}$) o s et g = r(O, $\frac{\pi}{3}$) o $t_{\overrightarrow{IO}}$

3) Soit φ le déplacement qui envoie A en D et D en B

Mque pour tout point M du plan on a φ(M) et g(M) sont symétrique par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

4) Caractériser l'isométrie h = φ o $t_{\overrightarrow{OJ}}$

Exercice :14

ABC un triangle rectangle en A tel que

$(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et O le milieu de [BC].

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie O en A et B en C.

b) Montrer que f est une rotation.

c) On note I le centre de f.

Donner une mesure de chacun des angles $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IO})$ et $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IA})$.

d) En déduire que I appartient au segment [AB] et que I est le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,1).

2) a) Soit r = $R_{(C, \frac{\pi}{3})}$. Caractériser l'application f o r.

b) On note C' l'image de C par f.

Montrer que O , I et C' sont alignés .

3) Soit g l'antidéplacement qui envoie O en A et B en C.

a) Déterminer les images des droites (OI) et (OA) par g.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

Exercice 15 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).

on considère les points A(3, 2), E(3, 0) et F(0, 2)

1)Soit f : z'= $-\frac{3}{2}iz + \frac{13i}{2}$

a)Caractériser f.

b)Montrer que f (E) = F. En déduire l'image de (O, $\vec{u}$) par f.

c)Soit N un point de (O, $\vec{u}$) et P un point de (O, $\vec{v}$) tel que ANP est un triangle rectangle en A.

Montrer que f(N) = P.

1)a) On note x l'abscisse de N et y l'ordonnée de P.

Montrer que 3x +2 y = 13.

b) Déterminer les points N et P dont les coordonnées sont des entiers.

2)Soit G l'ensemble des points M(x,y) de P tel que $(y-2)^2 = 6x-9$

a)Montrer que G est une parabole de foyer A dont on précisera la directrice.

b) Soit T la tangente à G au point K(3, 5)

Ecrire une équation de T puis tracer T et G.

Exercice 16 :

Dans le plan orienté, on considère un losange ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\cdot}{3}[2\pi]$

et AB = AC. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [BC] et [CD].

Soit E le point défini par : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OB}$.

1)On désigne par : $t_{\overrightarrow{OB}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$

et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On pose f = $t_{\overrightarrow{OB}}$ o r.

a)Montrer que f(c) = 0

b)En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

c)Déterminer la nature de triangle IAE.

2)Soit s la similitude directe telle que S(O) = A ;S(C) = I

a)Déterminer l'angle et le rapport de S.

b)Montrer que le triangle AIJ est équilatéral et a pour centre O. En déduire que J est le centre de S.

c)Montrer que S(I) = E.

3Soit σ la similitude indirecte telle que σ (C) = I et σ (I) = E

a)Montrer que σ admet un seul point invariant Ω .

b)Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés (C , 3) et (E , -1)

c)Déterminer et construire l'axe Δ de σ.

EXERCICE 17 :

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.

On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle. Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?

Partie B La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années, notée p (X < t), est donnée par :

p (X ≤ t) = $\int_0^{\lambda} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1. Déterminer λ sachant que p(X>5)=0.4.
2. Dans cette question, on prendra λ =0.18.

Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie > 5 ans ?

3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que p(X > 5) = 0.4.

a) On considère un lot de 10 ordinateurs.

Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.

b) Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'évènement «l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans» soit supérieure à 0,999 ?

Exercice : 18

On considère le triangle rectangle isocèle ABC tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On note D le symétrique de A par rapport au point C.

On désigne par S la similitude directe transformant D en C et C en B.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S.
2. On appelle Ω le centre de la similitude S.

a) En utilisant la relation $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega D}$ démontrer que $DC^2 = \Omega D^2$.

b) En déduire la nature du triangle ΩDC.

3. On pose $\sigma = sos$

a) Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer l'image du point D par la transformation σ

4. Démontrer que le quadrilatère ADΩB est un rectangle.
5. Dans cette question, le plan complexe est rapporté à

un repère orthonormal direct (A, u, v), choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 1, i et 2i.

a) Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est : z'=(1+i)z+2-i

où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point M et de son image M' par S.

b) On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'. $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

Démontrer que

c) Soit J le point d'affixe1+3i.

Existe-t-il des points M du plan dont les coordonnées sont des entiers relatifs et tels que $\overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{AJ}=0$,

M' = S(M),)

Exercice 19:

p entier premier ≥7 et n = p^4 - 1

1)a)Démontrer que p ≡ -1 (3) ou p ≡ 1 (3)

b)En déduire que n est divisible par 3.

2)En remarquant que p impaire, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que

p^2-1 = 4k(k+1) puis déduire que n est divisible par 16

3)Démontrer que n ≡ 0 (5)

4)Déduire de ce qui précède que 240 divise n.

Exercice 20:

On considère la suite (un) d'entiers naturels définie par : u_0 = 1 et, pour tout entier naturel n ;

$u_{n+1} = 10u_n + 21$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n , l' écriture décimale de u_n.

3. Montrer que u_2 est un nombre premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n , u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

5. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3u_n \equiv 4 - (-1)^n\ (11)$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n , u_n n'est pas divisible par 11.

6. a) Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1\ (17)$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8}, est divisible par 17.

Exercice 21 :

Soit ABC un triangle rectangle directe tel que AB = 2.AC , I et J les milieux respectives de [BC] et [AB] . On note D = $S_A(J)$

1/ a/ montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoie J en C et C en D

b/ Caractériser R.

2/ soit f = $R \circ S_{JC}$

a/ Déterminer f (I) , f (C) et f o f (J)

b/ Montrer que f n'est pas une symétrie orthogonale

c/ Préciser alors la nature de f et donner sa forme réduite

3/ Soit S la similitude directe qui transforme A en B et C en A

a/ Déterminer le rapport et l'angle de S

b/ Soit Ω le centre de S . préciser et construire Ω

4/ a/ Montrer que SoS est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport

b/ En déduire que Ω est le projeté orthogonale de A sur la droite (BC)

5/ Soit S' la similitude indirecte qui transforme A en B et C en A

a/ Déterminer le rapport de S'

b/ Soit Ω' le centre de S' et Δ son axe ; montrer que (S'o S') est une homothétie dont on précisera le rapport

c/ Déterminer S'oS'(C) , en déduire que $\overrightarrow{\Omega' B} = 4.\overrightarrow{\Omega' C}$ et construire Ω'

d/ Soit $E = h_{(\Omega';2)}(C)$.

Montrer que Δ = med[AE]

6/a/ Déterminer l'image de (AC) par S'

b/ La perpendiculaire Δ' à la droite (AB) en B coupe (AΩ') en B' , montrer que S'((AB)) = Δ'

en déduire que : S'(B) = B'

c/ La droite (IJ) coupe (AB') en K , montrer que S'(I) = K

7/ Soit $g = S \circ S'^{-1}$

a/ Préciser g(B) et g(A) et déterminer le rapport de g b/ En déduire que g est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe

c/ Montrer que les images de tout point M du plan par S et S' sont symétriques par rapport à la droite (AB)

Exercice 22 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Soit (E) : 3x² - 6x + 4y² - 9 = 0

a)Démontrer que (E) est une conique dont on précisera le centre Ω , les sommets A et A ', les foyers F et F' , l'excentricité e , ainsi que les directrices.

B)Vérifier que le point J (0 , $\frac{3}{2}$) appartient à (E) et donner une équation cartésienne de la tangente à (E) au point I . Tracer T et (E)

2)On donne la parabole (P) : $y^2 = \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$

a)Déterminer le sommet S , le foyer et la directrice de (P)

b)Vérifier que le point I appartient à (P)

c)Montrer que la droite T est aussi tangente à (P) en I

d)Tracer (P)

3)Soit Δ : x + 3 = 0 ; quel est est l'ensemble des points M tels que : d (M , O) = $\frac{1}{2}$ d (M , Δ) ?

4)Soit f l'application du plan dans lui- même qui à tout point M (x , y) associe le point M' (x' , y')

tel que : $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{2}{\sqrt{3}} y \end{cases}$

Déterminer une équation de (E ') image de (E) par f. Reconnaitre la nature de (E ') et Caractériser (E ')

Exercice 23:

1)On considère l'équation (E) : 8x+5y = 1, où est un couple de nombres entiers relatifs.

a)Donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2) Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple (a ; b) de nombres entiers

vérifiant : $\begin{cases} \mathrm{N} = 8a + 1 \\ \mathrm{N} = 5b + 2 \end{cases}$

a)Montrer que le couple (a ; -b) est solution de (E).

b)Quel est le reste, dans la division de N par 40

3) a) Résoudre l'équation 8x +5y = 100, où (x ; y) est un couple de nombres entiers relatifs.

b) Au VIIIe siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Exercice 24:

Partie A :

On considère la fonction numérique u définie pour tout réel x par $u(x) = \frac{x}{2^x}$

On note (C) la courbe représentative de u dans un repère orthonormé du plan.

1) Montrer que la fonction dérivée u' est définie sur R par $u'(x)=(1-x\ln 2)e^{-x\ln 2}$.

2) Dresser le tableau de variation de u.

3) Préciser les branches infinies de (C).

4) Tracer (C) et sa tangente (T_0) au point d'abscisse 0. (Prendre 2cm comme unité sur les axes des coordonnées).

Partie B :

On définit la suite numérique (V_n) par ;

$v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + 2^{-n})$

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $V_n = u(n)$.

2) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$

a) Démontrer par récurrence que

$S_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) - \frac{n+1}{2^n}$ pour tout entier naturel n.

b) Calculer la limite de la suite (S_n).

Exercice 25:

Soit (E) : $z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=0$

1)a)Montrer que E admet une solution réelle , noté z_1

b)Résoudre alors E

2)Soient A, B et C les points d'affixes respectives : 1, 2+2i, et 1-i

a)Placer A, B et C

b)Déterminer le module et un argument de $\frac{2+2i}{1-i}$.

En déduire la nature du triangle OBC.

c)Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ?

3)Soit D l'image de O par la rotation de centre C et d'angle $-\pi/2$

a)Déterminer l'affixe de D

b)Quelle est la nature de OCDB ?

Exercice 26 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle isocèle en A tel que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{..}{2}\left[2\pi\right]$.

On désigne E et D les symétriques de A respectivement par rapport aux points B et C.

Soit f la similitude directe qui envoie D en C et C en B.

1°)a) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

b) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude f.

c) On note H le projeté orthogonal de A sur (BC).

Montrer que f(H) = E

2°) On appelle I le centre de la similitude f.

a) En utilisant la relation $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID}$, démontrer que $DC^2 = ID^2$.

b) En déduire la nature du triangle IDC.

c) Construire le point I

3°) On munit le plan du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Soit φ l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -(1+i)\bar{z} + 2 - i$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre Ω d'affixe – 1 + 4i.

b) Soit Δ l'axe de la similitude indirecte φ. Déterminer φ(C) puis tracer Δ.

c) Donner une équation cartésienne de Δ.

Exercice 27:

Soit f(x)= $e^{-\sqrt{x-1}}$, x ≥ 1 et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)a)Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

Interpréter graphiquement le résultat.

b)Dresser le tableau de variation de f.

c)Tracer la courbe C de f.

2)Soit F(x) = $\int_1^{1+(\ln x)^2} f(t)\,dt$, x ∈]0, 1]

a)Mque F est dérivable sur]0, 1] et que F'(x) = 2lnx

b)Calculer F(x).

3)Pour tout α ≥ 1, on désigne par S(α) l'aire du domaine limité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1, et x = α

a)Mque S(α)= F(f(α))

b)Calculer S(α) et $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} S(\alpha)$

Exercice 28 :

Soit $f_n(x) = \sqrt{1+x}\, e^{-\frac{x}{n}}$; x ≥ -1 et n > 0, on désigne par C_n la courbe de f_n.

1)Mque toutes les courbes C_n passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.

2)a)Mque pour tout n>0, la courbe C_n admet une tangente horizontale en un point M_n.

b)On désigne par α_n l'abscisse de M_n.

Etudier la nature de la suite (α_n)

3)Etudier la position relative des courbes C_n et C_{n+1}.

4)On pose I= $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}\,dx$ et on désigne par (A_n) la suite définie par $A_n = \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx$

a)Calculer I.

b)Mque pour tout n >0 ; $1 - e^{\frac{1}{n}} \leq e^{-\frac{1}{n}} - 1$

c)En déduire que pour tout x ∈[-1, 1], $\left| e^{-\frac{x}{n}} - 1 \right| \leq e^{\frac{1}{n}} - 1$

d)Mque $\left| A_n - I \right| \leq \frac{4}{3}\sqrt{2}\,(e^{\frac{1}{n}} - 1)$

e)En déduire que la suite (A_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 29 :

Soit (o, i, j, k) un repère orthonormé de l'espace.

On considère les points

A(3, -2, 2) , B(6,1,5) et C(6,-2,-1)

1)Mque le triangle ABC est rectangle

2)Soit P :x + y + z – 3 = 0.

mque P est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.

3)Soit P' le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A.

Déterminer une équation cartésienne de P'.

4) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, droite d'intersection des plans P et P'.
5)Soit D(0, 4, -1).
a)Mque (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
b)Calculer le volume du tétraèdre ABDC.
c)Mque l'angle BDC a pour mesure $\frac{\pi}{4}$
6)a)Calculer l'aire du triangle BDC.
b)En déduire la distance du point A au plan (BDC)

Exercice 30:

A) Soit $f(x)=\frac{1}{\sin x}$, $x \in]0,\frac{\pi}{2}]$,
on désigne par C sa courbe représentative.
1) Etudier f et construire sa courbe C.
2) Vérifier que $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}]$, $f(x)=\frac{1+\tan^2(\frac{x}{2})}{2\tan(\frac{x}{2})}$
puis déduire une primitive de f sur$]0,\frac{\pi}{2}]$
3) Calculer la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C et les droites d'équations
$y=0$, $x=\frac{\pi}{3}$ et $x=\frac{\pi}{2}$.
4)a)que f est une bijection de$]0,\frac{\pi}{2}]$ sur $[1, +\infty[$
b) Soit g = f-1, calculer g(1), g($\sqrt{2}$) et g(2).
c)M que g est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $g'(x)=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$.
B) Soit $F(x)=\int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln x}\frac{dt}{\sqrt{e^{2t}-1}}$, $x \in]1, +\infty[$
1)a)Mque F est dérivable sur$]1, +\infty[$ et calculer F'(x).
b)En déduire que $\forall x \in]1, +\infty[$ on a : $F(x)=\frac{\pi}{4}- g(x)$.
c) Trouver lim F(x) en $+\infty$ et lim F(x) en 1.

Exercice 31:

Le plan est orienté. ABCD est un rectangle direct de centre O. AOID et OCID sont deux losanges. Le point J est le milieu du [CD] et le point L est le milieu de [BC].
1) Soit $R = r(I, \frac{\pi}{3})$
a) Déterminer R(O) et R(D)
b) Montrer que R(A)=B.
2) Soit $g = S_{(OL)} o S_{(OI)} o S_{(AD)}$
a) Vérifier que g(A)=C et g(D)=B.
b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.
3) Soit $h = h(C, \frac{1}{2})$ et on pose $\varphi = R\ o\ h\ o\ g^{-1}$
a) M que φ est une similitude indirecte de centre C.
b) Soit K le milieu de [IC]. Montrer que $\varphi(B) = K$
c) Montrer que $\varphi = hoS_{(AC)}$
Déterminer l'image par φ du rectangle ABCD.

Exercice 32:

Pour tout n >0 et pour tout x réel négatif, on pose
$F_n(x)=\int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^t}dt$
1)a)Calculer $F_1(x)$ et déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} F_1(x)=\ln(2)$
b)Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} F_2(x)$; ($\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$)
2)a)Mque pour tout n >0, on a : $F_{n+1}(x)+F_n(x) = \frac{1}{n}(1-e^{nx})$
b)Mque par récurrence sur IN, que $F_n(x)$ admet une limite finie lorsque x tends vers $-\infty$.
On pose dans la suite $R_n= \lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x)$
3)a)Vérifier que pour tout $t \leq 0$, $2e^t \leq 1 + e^t \leq 2$
b)Mque pour tout entier n >2 et pour tout réel x ≥0,
on a : $\frac{1}{2n}(1-e^{nx}) \leq F_n(x) \leq \frac{1}{2(n-1)}(1-e^{(n-1)x})$
c)En déduire un encadrement de R_n, pour n ≥2
4)Pour tout réel négatif x et pour tout entier n>0,
on pose : $G_n(x)=(-1)^n\int_x^0 e^{nt}dt$
a)Calculer $G_n(x)$ et mque $\lim\limits_{x\to-\infty} G_n(x)=\frac{(-1)^n}{n}$
b)Mque $G_1(x)+G_2(x)+\ldots+G_n(x)= -F_1(x)+(-1)^nF_{n+1}(x)$
5)On pose, pour tout entier n>0, $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$
a)Mque $u_n = \ln(2) + (-1)^{n+1}R_{n+1}$
b)Mque la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite

Exercice 33:

Soit $f(x)= \sqrt{1+x}\,e^{-x}$; $x \geq -1$
1)a)Etudier la dérivabilité de f à droite de -1.
b)Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c)Calculer la limite de f en $+\infty$

d) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2)Dresser le tableau de variation de f.

3)Donner une équation de la tangente à Cf au point d'abscisse 0.

4)Mque l'équation f(x)=x admet une unique solution α dans $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et que $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$

5)Tracer la courbe C de f

6)a)Mque $1+x \leq e^x$, pour tout réel x

b)En déduire que $\forall$ $x \geq -1$, on a : $f(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}$

7)Soit $\lambda \geq 1$ et $S(\lambda)=\int_1^{\lambda} f(x)dx$

a)Donner une interprétation graphique du réel $S(\lambda)$

b)Mque pour tout $\lambda\geq 1$, on a : $0\leq S(\lambda) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$

Exercice 34:

1)Soit $f(x) = x + \ln(\frac{x}{2x+1})$, $x > 0$

a)Etudier les variations de f

b)Mque la droite Δ :y = x - ln2 est asymptote à C

Etudier la position de Cf par rapport à Δ

c)Mque l'équation f(x)=0 admet une seule solution α et que $\alpha\in]1, \frac{5}{4}[$

2)Soit $g(x)= (2x+1)e^{-x}$

a)Etudier les variations de g et Tracer la courbe de g

b)Soit b >0. Déterminer l'aire A(b) de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la courbe Cg et la droite :x=b

c)L'aire A(b) admet-elle une limite qd b tend vers $+\infty$

3)Mque α est solution de l'équation g(x)=x

4)Mque si $1\leq x \leq \frac{5}{4}$ alors $1 \leq g(x) \leq \frac{5}{4}$

5)a)En étudiant le signe de g'' et les variations de g', montrer que pour tout $x \in[1,\frac{5}{4}]$, $-\frac{1}{2} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$

b)En encadrant $\int_a^b g'(x)dx$,

dem que $\forall$ a et b dans $[1,\frac{5}{4}]$, $|g(b) - g(a)| \leq \frac{1}{2} |b - a|$

6)Soit u la suite définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=g(u_n)$, $n\in IN$

a)Mque pour tout n ; $1 \leq u_n \leq \frac{5}{4}$.

b)Prouver que pour tout n, $|u_{n+1}- \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

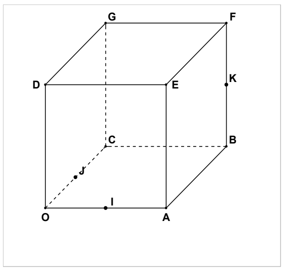
En déduire que pour tout n ; $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$

Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

c)Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée à 10^{-3} prés de α et donner une valeur.

Exercice 35

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$, on considère le cube OABCDEFG.



On note I, J et K sont les milieux des arêtes [OA], [OC] et [BF].

1)a- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{DI} \wedge \overrightarrow{DJ}$

b- En déduire qu' une équation cartésienne du plan P = (DIJ) est : $2x + 2y + z - 1 = 0$

2) a- Montrer que la droite (OK) est perpendiculaire au plan P.

b- Soit S la sphère de centre K passant par O.

Montrer que S et P sont sécants suivant un cercle $\mathcal{C}$ dont on déterminera le centre H et le rayon.

3) Soit Ω le point d'intersection des droites (OK) et(BD) et S' sphère de centre Ω et passant par O

a- Vérifier que Ω $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

b- Déterminer le rapport de l'homothétie de centre O qui transforme S en S'.

c- Soit Q le plan parallèle à P passant par O.

Montrer que Q est tangent à la sphère S en O.

Déduire la position relative de la sphère S' et du plan Q.

Exercice 37

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1)On considère la parabole P :$y^2 = 4x$

a)Déterminer le foyer F et la directrice D de P puis tracer P.

b)Soit A le point de P d'abscisse 4 et d'ordonnée strictement positive. Déterminer une équation de la tangente T à P au point A puis la tracer.
Cette tangente coupe la directrice D en B. Montrer que le triangle AFB est rectangle.
2)Soit H : $x^2-y^2-2x-15=0$. Caractériser H puis le tracer.
3)Soit l'ellipse E : $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$
a)Déterminer le centre, les sommets ; les foyers et l'excentricité de E
b)Tracer E dans le même repère.
4)Soit dans C l'équation :
$z^2-2(1+3\cos\theta)z+6\cos\theta + 5\cos^2\theta +5 =0$ où $\theta \in]0,\pi[$.
a)Résoudre E
b)Montrer que pour tout $\theta \in]0,\pi[$, le point M d'affixe $z =1+3\cos \theta +2i \sin\theta$ est un point de E
c)Existe-t-il une valeur de θ pour laquelle M est un point de P ?
5)Déterminer les équations des tangentes à E issues du point K(1, 3).

Exercice 38 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :
$f(x) = \frac{x+1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
1) a/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
b/ Dresser le tableau de variation de la fonction f.
c/ Tracer dans un repère orthonormé (unité 2cm) la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f.
2) a/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.
b/ Tracer la courbe ($\mathscr{C}'$) représentative de f^{-1}.
3) x étant un réel tel que $0 < x \leq 1$.
a/ Calculer $G(x) = \int_x^1 t\, f'(t)dt$.
b/ On pose $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$.
Exprimer F(x) + G(x) en fonction de x.
c/ Expliciter alors F(x).
4) a étant un réel tel que $0 < a < 1$
a/ Calculer l'aire A(a) de la partie du plan limitée par ($\mathscr{C}$), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = a et x =1.
b/ Calculer la limite de A(a) quand a tend vers 0 à droite.
c/ En déduire l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par ($\mathscr{C}$) , ($\mathscr{C}'$) et les droites d'équations respectives x = 1 et y = 1.
5) n étant un entier naturel tel que $n \geq 2$.
a/ Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique $u_n \in]0, +\infty[$.
b/ Montrer que la suite (u_n) est décroissante puis qu'elle est convergente.
c/ Calculer la limite de (u_n).

Exercice 39:

On considère l'équation différentielle (E) :y'+y=x+2.
1)Résoudre (E') : y'+y=0
2)Soit u et v deux fonctions dérivables sur IR telle que v(x)=u(x)-(x+1)
a)Montrer que u est une solution de E ssi v est une solution de E'
b)Déterminer la solution de E qui prend la valeur 0 en 0.
2)Soit n > 0 et f_n la fonction définie sur IR par $f_n(x)=1+x-e^{-nx}$
a)Dresser le tableau de variations de f_n puis construire la courbe C_1 de f_1
b)Montrer que $f_n(x)=1$ admet dans $]0, + \infty[$ une unique solution un et que $0 < u_n < 1$
c)Montrer que la suite un est décroissante
(On pourra étudier la signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$) puis qu'elle est convergente
d)Montrer que pour tout n > 1 ; $u_n = e^{-nu_n}$, en déduire la limite de u_n.

Exercice 40:

Soit ABCD un carré direct de centre I . on désigne par E le point de [IA) tel que $(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{ED}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$
Et par F le symétrique de E par rapport à I
1/ on considère la similitude directe S telle que S(B) = E et S(D) = F
a/ Déterminer S(I)
b/ déterminer les éléments caractéristiques de S
2/ soit S' la similitude indirecte transformant E en B et F en D . on pose f = S' o S
a/ Mque f est la symétrie orthogonale d'axe (BD)
b/ En déduire les éléments caractéristiques de S'.

Exercice 42 :

Soit l'équation (E) : **2017x – 1437y = 1** où x et y sont des entiers.

1) a) Justifier que 2017 est un nombre premier et que 2017 et 1437 sont premiers entre eux.

b) Vérifier que (166 , 233) est un couple solution de (E).

c) Résoudre dans Z² l'équation (E).

2) a) En utilisant 1c), déterminer tous les inverses de 1437 modulo 2017.

b) En déduire que 1784 est le plus petit inverse positif de 1437 modulo 2017.

3) On note F = {1, 2, …, 2016}. Soit m un élément de F.

a) Justifier qu'il existe un unique entier n de F tel que mn ≡1 (mod2017)

b) Résoudre dans F l'équation : $x^2 \equiv 1\ (\ mod\ 2017\ )$

c) Déduire que 2017 divise 2016 ! + 1

Exercice 43:

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A On se propose de résoudre d'équation différentielle (E) :y' + $e^{-y} = 1$

On pose $z = e^{y}$

1) Montrer que y est une solution de (E) si et seulement si z est une solution de l'équation différentielle (E') : z' = z – 1.

2) Résoudre (E').

3) a) Déduire l'ensemble des solutions de (E).

b) Déterminer la solution f de (E) telle que f(0) = ln(2)

Partie B

Soit f la fonction définie sur par f(x)=ln(1+ e^{x}):

et (C) sa courbe dans un repère orthonormé (O, i, j).

Unité graphique 2 cm.

1) Dresser le tableau de variation de f.

2)a) Justifier que pour tout réel positif x,

f(x) = x+ ln(1+ e^{-x}):

b) En déduire que (C) admet pour asymptote oblique la droite D d'équation y = x.

c) Etudier la position de (C) par rapport à D.

d) Tracer D et (C).

3) Soit I l'intégrale définie par :

$$I = \int_0^1 \ln(1+e^{-x})\,dx = \int_0^1 f(x) - x\,dx$$

a) Donner une interprétation géométrique de I.

b) M que pour tout réel , on a :

$\frac{1}{(1+t)^2} \le \frac{1}{1+t} \le 1$ **(1)**

c)En intégrant (1) sur [0,], pour x positif, montrer que,

$\forall x \ge 0, \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \le \ln\left(1+e^{-x}\right) \le e^{-x}$

d) En déduire que ln($\frac{2}{1+e^{-1}}$) $\le I \le 1 - e^{-1}$

4) Soit x un réel positif. On désigne par M et N les points de même abscisse x appartenant respectivement à (C) et (D).

On juge que M et N sont indiscernables sur le graphique lorsque la distance MN

est inférieure à 0,5 mm.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles M et N sont indiscernables.

Exercice 44 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{3^x-1}{3^x+1}$.

A/1) a/ Montrer que f est dérivable sur IR puis montrer que $f'(x) = \left(1 - f^2(x)\right) ln\sqrt{3}$.

b/ Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

c/ Expliciter $f^{-1}(x)$.

2) Construire dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) les courbes représentatives C de f et C' celle de f^{-1}.

(On tracera la tangente à la courbe C au point O).

B/ Soit x un réel positif. On pose $I_0(x)$ = x et pour tout n $\in \mathbb{N}^*$, I_n (x) = $\int_0^x f^n(t)dt$.

1) Calculer $I_1(x)$.

2) a/ Mque pour tout n ≥ 1, 0 ≤ I_n (x) $\le x\, f^n(x)$.

b/ En déduire $\lim_{n\to\infty} I_n(x)$.

3) a/ Mque ∀ n ≥ 0 , I_{n+2} (x) = I_n (x) - $\frac{2}{(n+1)ln3} f^{n+1}(x)$.

(on pourra utiliser 1) a/).

b/Déduire que pour tout n ≥ 1,

I_{2n}(x) = x - $\frac{2}{ln3}\left[f(x) + \frac{1}{3}f^3(x) + \ldots + \frac{1}{2n-1} f^{2n-1}(x)\right]$.

c/ Calculer alors

$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1).3^{2n-1}}\right]$.

Exercice 45:

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.
La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.

Partie A : À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.
La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication
· La chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98.
· La chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.
À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :
A l'évènement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ;
C l'évènement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».
On note *x* la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1) Montrer que $P(C) = 0,03x + 0,95$.

2) À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable.
Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

Partie B Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocolat. Sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire *Z* suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1) La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.

2. Calculer $P(Z > 2)$.

3. Sachant que la machine de l'atelier a déjà fonctionné pendant 3 ans, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans ?

Exercice 46: (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère l'ellipse E d'équation: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

1) a/ Donner les sommets, les foyers , les directrices de (E) et préciser son excentricité e.

b/ Tracer l'ellipse (E).

2) a/ Montrer que par le point I($\frac{25}{4}$, 0) passe exactement deux tangentes à l'ellipse
(E) aux points respectivement P et Q dont on donnera leurs coordonnées.

b/ Montrer que $\tan(\frac{\widehat{PIQ}}{2}) = e$.

3) a/ Soit M un point de E tel que $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta[2\pi]$.
Montrer que $OM=\frac{15}{\sqrt{9+16\sin^2\theta}}$

b/ Soit M' le point de E tel que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et par H le projeté orthogonal de O sur (MM') ,en utilisant les relations métrique dans le triangle OMM' montrer que $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{OM'^2}=\frac{1}{OH^2}$, en déduire que $OH=\frac{15}{\sqrt{34}}$.

4) Soit (β) l'ensemble des points M(x, y) vérifiant $\frac{x^2}{25}-\frac{y|y|}{9}=1$. Construire (β) avec une autre couleur.

Exercice 47 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR_+ par : $f(x) = e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$.
On note C : la courbe représentative de la fonction f dans un plan P rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) .

I/ 1) Soit h la fonction définie sur IR_+ par
$h(t)=\frac{e^{\sqrt{x}}-\sqrt{x}-1}{x}t-e^{\sqrt{t}}+\sqrt{t}+1.$

a/ Soit x > 0 ; montrer qu'il existe un réel a ∈ $]0,x[$ tel que $h'(a) = 0$.

b/ Déduire que f est dérivable à droite en 0.

2) a/ Dresser le tableau de variations de f.

b/ Construire la courbe C de f.

II/ Soit φ la fonction définie sur IR par:
$\varphi(x)=\int_0^{x^2}e^{\sqrt{t}}\,dt.$

1) a/ Montrer que φ est dérivable sur IR et que pour tout x ∈ IR on a: $\varphi'(x) = 2xe^{|x|}$.

b/ En déduire que pour tout x ∈ IR : $\varphi(x) = 2\int_0^x te^{|t|}\,dt$.

c/ Expliciter $\varphi(x)$ pour x ≥ 0 .

d/ En déduire l'aire A de la partie du plan limitée par (C) et les droites x = 0, x = 1 et y = 0.

2) Soit g la fonction définie sur IR_+ par g(x) = $e^{\sqrt{x}}$.
Soit n ∈ IN^* et k un entier compris entre 0 et $(n-1)$.

Montrer que : $\frac{1}{n}g(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{1+k}{n}} g(t)dt \leq \frac{1}{n}g(\frac{1+k}{n})$;

3) On pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} g(\frac{k}{n})$ où n ∈ IN*.

a/ M que pour tout n ∈ IN* on a : $2 \leq S_n \leq 2 + \frac{e}{n}$.

b/ Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

4) Soit n ∈ IN et $a_n = \int_0^1 t^n e^{\sqrt{t}}dt$ et $a_0 = -\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{t}}}{1+t}dt$.

a/ Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

b/ Mque $\sum_{p=0}^{n}(-1)^p a_p = -\varphi(1) + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t} e^{\sqrt{t}}\,dt$.

5) a/ Montrer que $\left|\sum_{p=0}^{n}(-1)^p a_p + \varphi(1)\right| \leq a_{n+1}$.

b/ En déduire : $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n}(-1)^p a_p\right)$.

<u>Exercice: 48 (3 points</u>)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, v)$.
Pour tout nombre complexe z on associe les points M, N
et P d'affixes respectives z, z² et z^5.

1) Montrer que M, N et P sont alignés si et seulement si $(z+1)(z^2+1) \in \text{IR}$

2) Soit G l'ensemble des points M tels que M, N et P soient alignés.

a) Montrer que M(x, y) ∈ G si et seulement si
3x² - y² + 2x + 1 = 0 ou y = 0

b) En déduire que G est l'union d'une droite et d'une hyperbole H dont on précisera les éléments caractéristiques.

c) Déterminer les asymptotes de H puis tracer H.

<u>Exercice ;49</u>

Soit E l'ensemble des fonctions f définies et deux fois dérivables sur IR
telles que pour tout réel x, f'(x)+f(-x)= e^x.

1) Résoudre l'équation différentielle E_0 : y'' + y = 0.

2) Soit f un élément de E.

a) Montrer que f est une solution de l'équation différentielle : y'' + y = $e^x + e^{-x}$.

b) Soit g la fonction définie sur IR par :
g(x) = f(x) - $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.
Montrer que g est une solution de l'équation différentielle E_0.

3) Déterminer alors l'ensemble E.

<u>Exercice 50 : (6 points</u>)

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+lnx} \quad si \ x \in]0,\frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e},+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$)

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0..

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0,\frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e},+\infty[$;
$f'(x) = \frac{lnx}{(1+lnx)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe C

3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Montrer que l'équation f(x) = $\sqrt{n}$ admet exactement deux solutions u_n et v_n telles que $\frac{1}{e} < u_n < 1 < v_n$.

4) a) Montrer que ∀ $n \geq 2, v_n \geq \sqrt{n}$, .
En déduire lim (v_n)

b) Montrer que ∀ x ≥ 16, $\sqrt{x} \geq 1 + lnx$.
En déduire que ∀ n ≥ 16 , $v_n \leq n$

c) Calculer alors $\lim\frac{\ln(v_n)}{\sqrt{n}}$

5)a) Montrer que (u_n) est décroissante puis déduire qu'elle est convergente.

b) Montrer que ∀ $n \geq 2, u_n = e^{\frac{u_n}{\sqrt{n}}-1}$,
en déduire lim u_n = e^{-1}.

c) Montrer que $\lim\sqrt{n}\left(u_n - \frac{1}{e}\right) = e^{-2}$.

<u>Exercice 19:</u>

Soit f la fonction définie sur I = [1, e] par f(x) =$\frac{\sqrt{1-lnx}}{x}$

1) a) Etudier la dérivabilité de f en 1^+ et en e^-

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Tracer la courbe C de f dans un R.O.N.

2)a) Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J qu'on précisera.

b)Soit C' la courbe de de f^{-1} ; Tracer C'

3) a)Calculer l'aire du domaine limité par la courbe C , les droites x=1, x=e et y =0

c)En déduire l'aire du domaine limité par les deux courbes C et c' et les deux axes des coordonnées.