Exercice 1:

Vrai ou Faux

1)Soit z un nombre complexe $|z+i|$ est égal à :
$|i\overline{z}+1|$

2)Soit z un nombre complexe non nul et d'argument α.
Un argument de $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est : $\frac{2\pi}{3}+\alpha$

3)soit $n\in IN$, $(\sqrt{3}+i)^n$ est un imaginaire pur ssi :
$n\equiv 3 \pmod 6$

4) x et y sont deux entiers et tel que
pgcd(24x,64y)=64 alors $x\equiv 0\ (64)$

5) L' équation : 6x + 18y = 3 admet dans Z x Z :
une infinité de solutions

6)Soit n un entier non nul tel que
$5n \wedge (3^2 x 5^3 x 7)=35$ **alors** $n\equiv 0\ (7)$

7)Soit $I=\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}dx$ alors on a : $I=-\frac{1}{4}$

8) g est la similitude indirecte d'écriture complexe :
$z'=-2i\overline{z}+3$, de centre A et d'axe D
Soit D' la perpendiculaire à D en A ,
alors : $g o S_{D'}$ est l'homothétie $h_{(A,2)}$

9) Pour tout entier p $\in [1; 46]$, il existe un unique entier relatif q tel que $pq\equiv 1[47]$.

10) Soient a et b deux entiers non nuls tel que a+b et a-b sont premiers entre eux alors a et b sont premiers entre eux.

11)$M^2\equiv 1[8]$ ssi M est impair.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0;\pi[$ par : $f(x)=\frac{1}{\sin x}$

1) Etudier la fonction *f* et construire sa courbe représentative (*C*) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

2) Montrer que la restriction *g* de *f* à l'intervalle $]0;\frac{\pi}{2}]$ possède une fonction réciproque g^{-1} dans le même repère que (*C*).

3) Soit $y=g^{-1}(x)$.
Montrer que $\sin y=\frac{1}{x}$ et que $\cos y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

4) En déduire que pour tout *x* de $]1,+\infty[$
$(g^{-1})'(x)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

5) En se servant des résultats précédents, calculer $\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}}\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}dt$

Exercice 3 :

1)Soient A(4+i), B(1+i), C(5i) et D(-3-i)

Placer ces points sur une figure.

2)Soit f : z'=(1+2i)z-2-4i

a)Préciser les images des points A et B par f

b)Caractériser l'application f, on désigne par I son centre.

3)a)Montrer que pour tout z on a : z'-z = -2i(2 – i - z)

b)Evaluer, pour tout point M différent du point I :
$\frac{MM'}{IM}$ et $(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MM'})$

c)Quelle est la nature du triangle IMM'

d)Soit $E(-1-i\sqrt{3})$. Ecrire Z_E sous forme exponentielle.

Puis placer E

Déduire une construction du point E = f(E)

Exercice 5 :

Dans la figure ci-contre, le quadrilatère ABCD est un losange
de sens direct, de centre O.
I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [AD] et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement h qui transforme A en B et B en D

b) Caractériser h.

c) Déterminer l'image du triangle ABD par h.

2. Soit h_1 un antidéplacement qui transforme l'ensemble {A, B, D} en l'ensemble {B, C, D} et tel que $h_1(A) = C$.

a) Déterminer l'image du segment [BD] par h_1.

b) Caractériser alors h_1.

3) Soit h_2 un déplacement qui transforme l'ensemble {A, B, D} en l'ensemble {B, C, D} et tel que $h_2(A) = D$.

a) Montrer que $h_2(D) = C$.

b) Caractériser alors h_2.

Exercice 6

Partie A :

Soit g la fonction définie sur **R** par :
$g(x) = 2e^x - x - 2$.

1) Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.

2) Etudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variations.

3) On admet que l'équation g(x) = 0 a exactement deux solutions réelles.

a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.

b) L'autre solution est appelée α.
Montrer que $-1{,}6\le\alpha\le-1{,}5$.

4) Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs du réel x.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur **R** par :
$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

2) a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et g(x) ont le même signe.

b) Etudier le sens de variation de f .

3) a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{-(\alpha^2+2\alpha)}{4}$, où α est défini dans la partie B.

b. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

4. Etablir le tableau de variations de f .

5. Tracer la courbe (C), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).

Exercice 7

Vrai ou Faux

1) Soit f la transformation qui à M(z) associe M'(z') telle que : $z' = 2i\bar{z} - 1 - i$ et I(1 + i).

f est une similitude indirecte de rapport 2, de centre I et d'axe $\Delta : x + 2y - 3 = 0$

2) On considère l'équation (E) : $24x - 16y = 8$; où x et y sont des entiers relatifs.

Les solutions de (E) sont de la forme :

$(x,y) = (3k+1 ; 2k+1)$, $k\in\mathbb{Z}$.

3) On considère l'équation (E'): $x^2 + 5x - 2 \equiv 0\ [17]$

Les solutions de (E') sont de la forme :

$x = 17k + 13$ ou $x = 17k + 8$, $k\in\mathbb{Z}$.

4) Soit $N = (22)^{3n+2} + (13)^{3n+1}$ où n est un entier naturel, alors: $N \equiv 1\ [9]$

Exercice 8

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit $\theta\in[0,\pi]$

1°) Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation

(E_θ): $z^2 - 2(1+3e^{i\theta})z - 3 + 10e^{i\theta} + 8e^{2i\theta} = 0$.

Résoudre (E_θ) dans $\mathbb{C}$.

2°) On désigne par M et N les points d'affixes respectives $z_1 = 3 + 2e^{i\theta}$ et $z_2 = -1 + 4e^{i\theta}$

a)Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ varie.

b)Peut-on avoir M = N ?

c)Déterminer θ pour que O soit un point du cercle de diamètre [MN].

3°) On considère les points A et B d'affixes respectives :

$z_A = 3 + 2i$ et $z_B = -1 + 4i$.

Extérieurement au triangle OAB, on construit les deux carrés OA_1A_2A et OBB_1B_2.

a) En remarquant que A_2 est l'image de O par une rotation de centre A, déterminer l'affixe de A_2.

En déduire l'affixe du centre I du carré OA_1A_2A.

b) En remarquant que B_1 est l'image de O par une rotation de centre B, déterminer l'affixe de B_1.

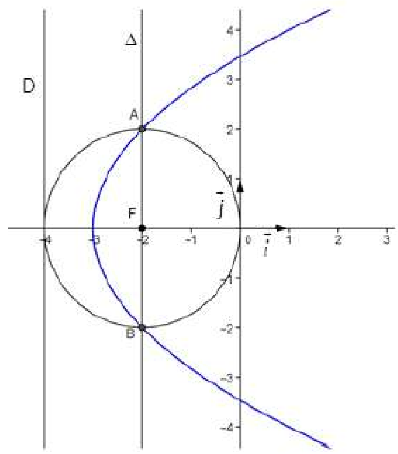
En déduire l'affixe du centre J du carré OBB_1B_2.

c) Calculer l'affixe du milieu K du segment [AB]. A l'aide des affixes des différents points, calculer les distances KI et KJ, ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KJ})$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 9:

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la parabole P de Foyer F (-2, 0) et de directrice D : x= - 4. On désigne par Δ la droite parallèle à D passant par F.

On appelle A et B les points d'intersection de Δ et la parabole P. (On a représenté les droites D et Δ, la parabole P et le cercle de diamètre [AB].



1) Soit M un point de la parabole P distinct de A et B. Soit H le projeté orthogonal de M sur d.

a) Montrer que MF – MH = 2 ou MF + MH = 2

b) En déduire que le cercle de centre M et de rayon MH est tangent au cercle de diamètre [AB].

2) a)Déterminer le sommet S et le paramètre p de la parabole P.
b)Montrer qu'une équation cartésienne dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la parabole P est :$y^2=4(x+3)$.
3) Soit m un réel non nul et Dm :y=m(x+2)
La droite Dm coupe la parabole P en deux points G et L. On admet que le point N milieu de [GL] a pour coordonnées $N(\frac{2}{m^2}-2,\frac{2}{m})$
a)Montrer que le point N varie sur une parabole fixe P' que l'on déterminera.
b)Tracer la parabole P' sur la même figure.

Exercice 10 :
On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur **N** par :$U_0 = 0$, $U_{n+1} = \frac{2u_n+v_n}{3}$; $V_0 = 1$, $V_{n+1} = \frac{3u_n+2v_n}{5}$
1) Mque pour tout entier naturel non nul n, $U_n \le V_n$.
2) Montrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.
3) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.
4) Soit la suite (W_n) définie sur **N** par :
$W_n = 9U_n + 5V_n$.
a) Montrer que la suite (W_n) est une suite constante.
b) En déduire la limite commune des suites (U_n) et (V_n).

Exercice 11
I/ On considère dans $\mathbf{Z}^2$: (F) : 2x + 5y = 3.
1) Résoudre l'équation (F).
2) Soit (x; y) une solution de (F).
a) Quelles sont les valeurs possibles de PGCD(x; y)?
b) Déterminer les couples (x; y), solutions de (F), tels que PGCD(x; y) = 3.
II/ L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère la droite (Δ) passant par le point A(−3; 1;−3) et de vecteur directeur
$\vec{u} = 2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ et la droite (D) passant par le point B(3; 2; 3) et de vecteur directeur
$\vec{v} = \vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$.
1) Démontrer que les droites (Δ) et (D) sont orthogonales et non coplanaires.
2) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant (Δ) et parallèle à (D).
3) Soit (S) la sphère de centre C(−1; 0;−1) et de rayon 6 et (P) le plan d'équation
2x + y +2z + 11 = 0.
Montrer que (S) et (P) se coupent suivant un cercle de centre A dont on déterminera le rayon.

Exercice 12:
On pose pour tout n ≥1 ; $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^2 (2-x)^n e^x dx$
1)Calculer I_1
2)Etablir que pour tout n ≥1, $0 \le I_n \le \frac{2^n}{n!}(e^2-1)$
3) a)Montrer que pour tout n ≥1 ; $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$
b) Déduire que $e^2 = 1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\dots+\frac{2^n}{n!}+I_n$
4)On pose $u_n = \frac{2^n}{n!}$; pour tout n≥1
a)Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout n ≥3, $u_{n+1} \le \frac{1}{2}u_n$
b)En déduire que pour tout entier naturel n>3,
$0 \le u_n \le u_3(\frac{1}{2})^{n-3}$
5)En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de (I_n)
6)Justifier enfin que $e^2 = \lim_{n\to+\infty} 1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\dots+\frac{2^n}{n!}$

Exercice 13 :
Soit u la suite définie sur IN* par $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n}\frac{1}{k}$
A)1) a)Montrer que pour tout n > 0
$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$
b)Déduire que la suite u est convergente.
B)Soit $f(x)=\frac{1}{x} + \ln(\frac{x}{1+x1})$
1)a)Justifier que pour tout entier n > 0
:$\frac{1}{1+n} \le \int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx \le \frac{1}{n}$
b) Vérifier que pour tout n>0, $\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{n} - f(n)$
c) En déduire que pour tout n > 0, $0 \le f(n) \le \frac{1}{n(n+1)}$
2)Soit la suite (S_n) définie sur IN* par $S_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k(1+k)}$
a)Montrer que pour tout n > 0,
$0 \le f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \le Sn.$
b)Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct fe -1 et de 0 on ait :
$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$
En déduire que $S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$
En utilisant les questions précédente, déterminer alors la limite quand n tend vers +∞ de $\sum_{k=n}^{k=2n} f(k)$
Vérifier que pour tout n ≥ 1;
$f(n)+f(n+1)+\dots+f(2n) = u_n - \ln(2+\frac{1}{n})$
Déterminer la limite de la suite u

Exercice 14

Soit (E) l'équation: $z^3 + (3 - d^2) z + 2i(1+d^2) = 0$, où d est un nombre complexe donné de module 2.

1)a) Vérifier que 2i est une solution de l'équation (E).

b) Résoudre dans C l'équation (E).

2) Dans le plan complexe P, on considère les points A, B, M, et N d'affixes respectives 2i , -i, -i+d et –i-d.

a) Calculer MN et déterminer le milieu de [MN].

b) En déduire que lorsque d varie dans C, les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera.

c) Dans le cas où AMN est un triangle, montrer que O est le centre de O est le centre de gravité du triangle AMN.

d) En déduire les valeurs de d pour lesquelles le triangle AMN est isolcèle de sommet principal A.

Exercice 15 :

On considère la suite J_n définie par

$J_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$

1)Démontrer que la suite J est croissante

2)On définit la suite (I_n) , pour tout n > 0,

$I_n = \int_1^n e^{-t}(1+t)\,dt$

a) Justifier que pour tout $t \geq 1$;on a $\sqrt{1+t} \leq 1+t$

b) En déduire que $J_n \leq In$

c) Calculer I_n en fonction de n.

En déduire que la suite (J_n) est majorée

d) Conclure que la suite (J_n) est convergente.

Exercice 16:

1)Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes : $\bar{z} - 3iz - 3 + 6i = 0$

2)Soit A(4-2i) Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.

3)Soit D(2i)

a)Représenter l'ensemble E des points M(z)$\neq 2i$ tels que arg(z-2i)=$\frac{\pi}{4}$+2kπ

b)Représenter l'ensemble F des points M(z) tels que z=2i+2$e^{i\theta}$;$\theta \epsilon IR$

4)A tout point M(z$\neq -2$) associe le point M'(z') telle que z'=$\frac{z-1}{\bar{z}+2}$

Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que $|z'| = 1$

Exercice 17

Le plan est orienté dans le sens direct, ABCD est un losange de centre O, I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [AD] et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}$ (2π)

1)a)Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui envoie A en B et I en O

b) Caractériser f

c)Déterminer l'image du triangle ABD par f.

2) Soit g l'antidéplacement qui transforme l'ensemble {A, B, D} en l'ensemble {B, C, D} et tel que g(A)=D

a)Montrer que g(D)=B

b) Caractériser alors g

3) Soit s un antidéplacement qui transforme l'ensemble {A,B,D} en l'ensemble {B,C,D} et et tel que s(A)=C

a)Démontrer que s est une symétrie orthogonale d'axe (BD)

b) Définir les isométries suivantes

f = r(B, $\frac{\pi}{3}$) o s et g = r(O, $\frac{\pi}{3}$) o $t_{\overrightarrow{IO}}$

3) Soit φ le déplacement qui envoie A en D et D en B

Montrer que pour tout point M du plan on a φ(M) et g(M) sont symétrique par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

4) Caractériser l'isométrie h = φ o $t_{\overrightarrow{OJ}}$

Exercice 18 :

On considère la suite définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{t}dt$.

1) a/ Calculer u_1 et u_2

b/ Montrer que pour tout réel n > 0,

on a : $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{n}$.

c/ Déduire la monotonie de la suite u.

2) On pose, pour tout n $\geq 1, v_n = u_n - \frac{1}{n}$

Etudier la monotonie de la suite v.

3) a/ Montrer que les suites u et v sont convergentes vers la même limite ℓ.

b/ Donner un encadrement de ℓ.

c/ Déduire la limite de la suite S définie par $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Exercice :19

ABC un triangle rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et O le milieu de [BC].

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie O en A et B en C.

b) Montrer que f est une rotation.

c) On note I le centre de f.

Donner une mesure de chacun des angles $(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IO})$ et $(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IA})$

d) En déduire que I appartient au segment [AB] et que I est le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,1).

2) a) Soit r = $R_{(C,\frac{\pi}{3})}$. Caractériser l'application f o r.

b) On note C' l'image de C par f.

Montrer que O , I et C' sont alignés .

3) Soit g l'antidéplacement qui envoie O en A et B en C.

a) Déterminer les images des droites (OI) et (OA) par g.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

<u>Exercice 20 :</u>

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).

on considère les points A(3, 2), E(3, 0) et F(0, 2)

1)Soit f : z'= $-\frac{3}{2}iz+\frac{13i}{2}$

a) Caractériser f.
b) Montrer que f (E) = F. En déduire l'image de (O, $\vec{u}$) par f.
c) Soit N un point de (O, $\vec{u}$) et P un point de (O, $\vec{v}$) tel que ANP est un triangle rectangle en A. Montrer que f(N) = P.

2) a) On note x l'abscisse de N et y l'ordonnée de P. Montrer que 3x +2 y = 13.
b) Déterminer les points N et P dont les coordonnées sont des entiers.

3) Soit G l'ensemble des points M(x,y) de P tel que (y-2)² = 6x-9
a)Montrer que G est une parabole de foyer A dont on précisera la directrice.
b) Soit T la tangente à G au point K(3, 5) Ecrire une équation de T puis tracer T et G.

<u>Exercice 21 :</u>

Dans le plan orienté, on considère un losange ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\frac{..}{3}[2\pi]$ et AB = AC. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [BC] et [CD].

Soit E le point défini par : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OB}$.

1)On désigne par : $t_{\overrightarrow{OB}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$ et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On pose f = $t_{\overrightarrow{OB}}$ o r.

a)Montrer que f(c) = 0

b)En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

c)Déterminer la nature de triangle IAE.

2)Soit s la similitude directe telle que S(O) = A ;S(C) = I

a)Déterminer l'angle et le rapport de S.

b)Montrer que le triangle AIJ est équilatéral et a pour centre O. En déduire que J est le centre de S.

c)Montrer que S(I) = E.

3Soit σ la similitude indirecte telle que σ (C) = I et σ (I) = E

a)Montrer que σ admet un seul point invariant Ω .

b)Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés (C , 3) et (E , -1)

c)Déterminer et construire l'axe Δ de σ.

EXERCICE 22

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.

On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.

Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?

Partie B La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.

Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années, notée p (X < t), est donnée par :

p (X ≤ t) = $\int_0^{\lambda}\lambda e^{-\lambda x}dx$.

1. Déterminer λ sachant que p(X>5)=0.4.

2. Dans cette question, on prendra λ =0.18.

Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que p(X > 5) = 0.4.

a) On considère un lot de 10 ordinateurs.

Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.

b) Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'évènement «l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans» soit supérieure à 0,999 ?

Exercice :23

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = x(1 - \ln x)$ et $f(0) = 0$. On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A°)1°)a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0.

2°)a) Dresser le tableau de variation de f. Tracer C.

b) Soit α un réel de $]0, 1[$. Calculer l'aire $A(\alpha)$ du domaine limité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = e$.

c) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} A(\alpha)$

B°) Soit F la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par :

$$F(x) = \int_{e^x}^{1} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt.$$

1°)a) Montrer que F est dérivable sur $]-\infty, 0]$ et $\forall x \le 0$, $F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

b) En déduire le sens de variation de F.

c)M que F admet une limite finie ℓ lorsque x tend $-\infty$.

2°)a) Montrer que

$$\forall x \le 0,\quad \frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f(t)dt \le F(x) \le \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f(t)dt.$$

b) Vérifier que la fonction $x \to x^2\left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2}\right)$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

c) Montrer alors que $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_{e^x}^{1} f(t)dt = \frac{3}{4}$.

En déduire que $\frac{3}{8} \le \ell \quad \frac{3}{4}$.

C°) Soit (I_n) la suite réelle définie sur IN* par :

$$I_n = \int_{1}^{e} x(1-\ln x)^n\,dx$$

1°) Montrer que pour tout entier non nul,

$$I_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}.I_n$$

2°)a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et à termes positifs.

b) Montrer que pour tout entier $n \ge 2$, $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{1}{n-1}$.

c)Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n.I_n$.

Exercice : 24

On considère le triangle rectangle isocèle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On note D le symétrique de A par rapport au point C.

On désigne par la similitude directe transformant D en C et C en B.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S.
2. On appelle Ω le centre de la similitude S.

a) En utilisant la relation $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega D}$ démontrer que $DC^2 = \Omega D^2$.

b) En déduire la nature du triangle ΩDC.

3. On pose $\sigma = sos$

a) Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer l'image du point D par la transformation σ

4. Démontrer que le quadrilatère $AD\Omega B$ est un rectangle.
5. Dans cette question, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (A, u, v), choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 1, i et 2i.

a) Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est : $z' = (1+i)z + 2 - i$

où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point M et de son image M' par S.

b) On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'. $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

Démontrer que

c) Soit J le point d'affixe1+3i.

Existe-t-il des points M du plan dont les coordonnées sont des entiers relatifs et tels que $\overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{AJ} = 0$, M' = S(M),)

Exercice 25:

p entier premier ≥ 7 et $n = p^4 - 1$

1)a)Démontrer que $p \equiv -1\ (3)$ ou $p \equiv 1\ (3)$

b)En déduire que n est divisible par 3.

2)En remarquant que p impaire, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que

$p^2 - 1 = 4k(k+1)$ puis déduire que n est divisible par 16

3)Démontrer que $n \equiv 0\ (5)$

4)Déduire de ce qui précède que 240 divise n.

Exercice 26 :

Soit θ un réel de l'intervalle $]0; \pi[$.

1) Résoudre dans **C** l'équation

(E) : $z^2 - 2iz - 1 - e^{2i\theta} = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; on considère les points A, M et N d'affixes respectives $-1 + i$, $i + e^{i\theta}$ et $i - e^{i\theta}$.

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux.

b) Montrer que lorsque θ varie dans $]0; \pi[$, les points M et N varient sur un cercle (C) que l'on déterminera.

3) a) Déterminer en fonction de θ l'aire $A(\theta)$ du triangle AMN.

b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle l'aire $A(\theta)$ est maximale et placer dans ce cas les points M et N sur le cercle (C).

Exercice 27:

On considère la suite (un) d'entiers naturels définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 10u_n + 21$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $3u_n = 10^{n+1} - 7$.
b) En déduire, pour tout entier naturel n , l' écriture décimale de u_n.
3. Montrer que u_2 est un nombre premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n , u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.
5. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3u_n \equiv 4 - (-1)^n \ (11)$.
b) En déduire que, pour tout entier naturel n , u_n n'est pas divisible par 11.
6. a) Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1 \ (17)$.
b) En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8}, est divisible par 17.

Exercice 28:(Questions indépendantes)

1)Montrer que si $x \wedge y = 1$ alors $x^2 \wedge y^2 = 1$; $x^n \wedge y^n = 1$

2)Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple d'entiers naturels (a, b) vérifiant : N=9a+1 et N= 5b+3
Déterminer le reste de la division euclidienne de N par 45

3)Déterminer tous les couples (x,y) d'entiers relatifs tels que : $\begin{cases} \text{ppcm}(x,y) = 396 \\ xy = 2376 \end{cases}$

Exercice 29

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit f l'application du plan P dan lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = (z - i)(mz - 1)$ où m est un réel positif.

1°) Déterminer la nature de f lorsque m = 0
On prend désormais m strictement positif et différent de 1.

2°) Soit Γ_m l'ensemble des points M(z) tels que z' soit imaginaire où z' désigne l'affixe du point M' image de M par f.

a)Montrer que M(z) est un point de Γ_m si et seulement si $m\left(z^2 + \bar{z}^2\right) - m.i.\left(z - \bar{z}\right) - \left(z + \bar{z}\right) = 0$

a) Montrer alors que Γ_m a pour équation : $\left(x - \frac{1}{2m}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1 - m^2}{4m^2}$

b) En déduire que Γ_m est une hyperbole dont on précisera le centre et l'excentricité.

c) Déterminer un foyer et la directrice associée de $\Gamma_{\frac{1}{2}}$ pour m = $\frac{1}{2}$

Exercice 30 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Soit (E) : 3x² - 6x + 4y² - 9 = 0

a)Démontrer que (E) est une conique dont on précisera le centre Ω , les sommets A et A ', les foyers F et F' , l'excentricité e , ainsi que les directrices.

B)Vérifier que le point J (0 , $\frac{3}{2}$) appartient à (E) et donner une équation cartésienne de la tangente à (E) au point I . Tracer T et (E)

2)On donne la parabole (P) : $y^2 = \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$ a)Déterminer le sommet S , le foyer et la directrice de (P)

b)Vérifier que le point I appartient à (P)

c)Montrer que la droite T est aussi tangente à (P) en I

d)Tracer (P)

3)Soit Δ : x + 3 = 0 ; quel est est l'ensemble des points M tels que : d (M , O) = $\frac{1}{2}$ d (M , Δ) ?

4)Soit f l'application du plan dans lui- même qui à tout point M (x , y) associe le point M' (x' , y ')

tel que : $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{2}{\sqrt{3}} y \end{cases}$

Déterminer une équation de (E ') image de (E) par f.
Reconnaitre la nature de (E ') et Caractériser (E ')

Exercice 31:

1)On considère l'équation (E) : 8x+5y = 1, où est un couple de nombres entiers relatifs.

a)Donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2) Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple (a ; b) de nombres entiers

vérifiant : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

a)Montrer que le couple (a ; -b) est solution de (E).

b)Quel est le reste, dans la division de N par 40

3) a) Résoudre l'équation 8x +5y = 100,

où (x ; y) est un couple de nombres entiers relatifs.
b) Au VIIIe siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Exercice 32:

Partie A :

On considère la fonction numérique u définie pour tout réel x par $u(x) = \frac{x}{2^x}$

On note (C) la courbe représentative de u dans un repère orthonormé du plan.

1) Montrer que la fonction dérivée u' est définie sur R par $u'(x)=(1-x\ln 2)e^{-x\ln 2}$.

2) Dresser le tableau de variation de u.

3) Préciser les branches infinies de (C).

4) Tracer (C) et sa tangente (T_0) au point d'abscisse 0.
(Prendre 2cm comme unité sur les axes des coordonnées).

Partie B :

On définit la suite numérique (V_n) par ;
$v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + 2^{-n})$

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $V_n = u(n)$.

2) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$

a) Démontrer par récurrence que
$S_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) - \frac{n+1}{2^n}$ pour tout entier naturel n.

b) Calculer la limite de la suite (S_n).

<u>Exercice 33:</u>

Soit ABCD un carré de centre O tel que

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\;}{2}(2\pi)$. On désigne I = A * B et J = A * D

On note s la similitude directe tels que

s(D) = O et s(C) = I.

1) a) Déterminer le rapport et l'angle de s.

b) Soit Ω le centre de s. Trouver une construction géométrique de Ω.

2) a) Préciser les images respectives des droite (BD) et (BC) par s .

b) Déterminer alors s (B) et s (A) et s o s (B) .

c) Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés (B , 1) et (J , 4).

<u>Exercice 32:</u>

Soit (E) : $z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=0$

1)a)Montrer que E admet une solution réelle , noté z_1

b)Résoudre alors E

2)Soient A, B et C les points d'affixes respectives :1, 2+2i, et 1-i

a)Placer A, B et C

b)Déterminer le module et un argument de $\frac{2+2i}{1-i}$.

En déduire la nature du triangle OBC.

c)Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ?

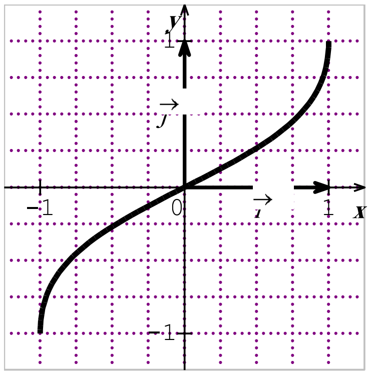
3)Soit D l'image de O par la rotation de centre C et d'angle $-\pi/2$

a)Déterminer l'affixe de D

b)Quelle est la nature de OCDB ?

<u>Exercice 34</u>

I) Dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, (unité 2 cm), on a représenté ci-contre la courbe de la fonction f définie sur [- 1, 1] par :



$f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

1°) En utilisant le graphique.

a)Montrer que f réalise une bijection de [-1 , 1] sur [- 1, 1].

b)Etudier le signe de f(x) – x, pour x ∈ [-1 , 1]

2°) On note g la réciproque de f.

a)Montrer que pour tout x ∈ [-1 , 1], $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

b)Calculer l'aire du domaine limité par les courbes C de f et C ' de g.

c)Montrer que $\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx = 1-\ln 2$

<u>Exercice 35</u>

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle isocèle en A tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\;}{2}[2\pi]$.

On désigne E et D les symétriques de A respectivement par rapport aux points B et C.
Soit f la similitude directe qui envoie D en C et C en B.

1°)a) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

b) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude f.

c) On note H le projeté orthogonal de A sur (BC). Montrer que f(H) = E

2°) On appelle I le centre de la similitude f.

a) En utilisant la relation $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{ID}$, démontrer que $DC^2=ID^2$.

b) En déduire la nature du triangle IDC.

c) Construire le point I

3°) On munit le plan du repère orthonormé direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

Soit φ l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -(1+i)\bar{z}+2-i$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre Ω d'affixe – 1 + 4i.

b) Soit Δ l'axe de la similitude indirecte φ. Déterminer φ(C) puis tracer Δ.

c) Donner une équation cartésienne de Δ.

Exercice 36:

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur I=[1, e]

1)Donner par lecture graphique

a) f(1), f(e), f'd(1) et $\lim_{x\to e^-}\frac{f(x)}{x-e}$

b)Le sens de variation de f sur I

2)a) Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J qu'on précisera.

b)Soit C' la courbe de de f-1 ; Tracer C'

3) On suppose que pour tout réel x de I, f(x) $=\frac{\sqrt{1-\ln x}}{x}$

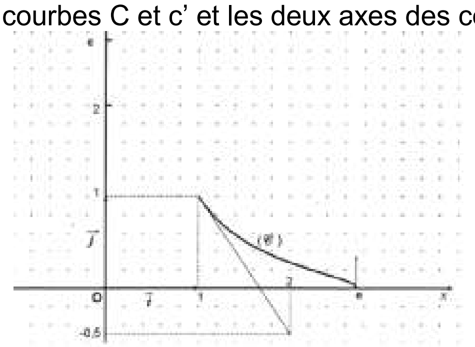
Soit F la fonction définie sur I par

F(x)$=\frac{2}{3}(1-\ln x)\sqrt{1-\ln x}$

a)Montrer que F est une primitive de f sur I

b)Calculer l'aire du domaine limité par la courbe C , les droites x=1, x=e et y =0

c)En déduire l'aire du domaine limité par les deux courbes C et c' et les deux axes des coordonnées.



Exercice 37:

Soit f(x)$=\frac{e^{2x}}{1+e^x}$

1)Dresser le tableau de variation de f

2)a)Déterminer les branches infinies de Cf

b)Tracer Cf.

3)a)Mque f est une bijection de IR sur IR*+

b)Tracer la courbe C' de f^{-1}

c)Calculer $f^{-1}(x)$ pour x >0.

4)a)Vérifier que pour tout x on a : f(x)=$e^x-\frac{e^x}{1+e^x}$

b) Soit λ < 0, Calculer l'aire A(λ) du domaine limitée par la courbe C', l'axe des ordonnées et les droites : y=λ et y=0

Exercice 38:

∀ n>0, Soit $f_n(x)=\frac{(\ln x)^n}{x^2}$,

A)1) Etudier suivant n les variations de f_n.

2) Etudier les postions relatives de C_n et C_{n+1}

3) Tracer C_1 et C_2.

B) n >0, on pose $I_n=\int_1^e fn(x)dx$

1)On pose F(x)$=\frac{1+\ln x}{x}$, Calculer F'(x), en déduire I_1

2) En utilisant une intégration par parties

Mque $I_{n+1}=\frac{-1}{e}+(n+1)I_n$.

3) Déduire l'aire en cm² du domaine compris entre les courbes C_1 et C_2 et les droites d'équations x=1 et x=e.

4)Mque par récurrence que pour tout n >0,

$$\frac{1}{n!}I_n=1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots\frac{1}{n!}\right)$$

5)a)Mque ∀ n >0, $0\le I_n\le 1$

b)En déduire lim $\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots\frac{1}{n!}\right)$

Exercice 39:

Soit f(x)= $e^{-\sqrt{x-1}}$, x ≥ 1 et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a)Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat.

b)Dresser le tableau de variation de f.

c)Tracer la courbe C de f.

2)Soit F(x) = $\int_1^{1+(\ln x)^2} f(t)dt$, x ∈]0, 1]

a)Mque F est dérivable sur]0, 1] et que F'(x) = 2lnx

b)Calculer F(x).

3)Pour tout α ≥ 1, on désigne par S(α) l'aire du domaine limité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1, et x = α

a)Mque $S(\alpha)= F(f(\alpha))$
b)Calculer $S(\alpha)$ et $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} S(\alpha)$

Exercice 40:

Soit f la fonction sur IR par $f(x)= x e^{\frac{1-x}{2}}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un plan rapportée à un, repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
A)1) Dresser le tableau de variation de f.
2) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on précisera les cordonnées.
3) Tracer (C).
4) Mque pour tout réel x de [0,1], on a : $0\le f(x) \le 1$.

B) On pose, $\forall n\in IN^*$, on a $I_n = \dfrac{1}{n\,!2^{n+1}} \displaystyle\int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}} dx$,

et $U_n=1 + \dfrac{1}{1\,!2} + \dfrac{1}{2\,!2^2} +\dots\dots + \dfrac{1}{n\,!2^n}$

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.
2) Mque, pour tout n de IN^*, on a : $I_{n+1}=I_n - \dfrac{1}{(n+1)\,!2^{n+1}}$
3) Démontrer, par récurrence, que pour tout n de IN^*, on a : $U_n=\sqrt{e} - I_n$.
4)a)Mque,pour tout n de IN*,on a :$0\le I_n\le \dfrac{1}{n\,(n\,!)2^{n+1}}$
b) En déduire lim U_n.

Exercice 41 :

Soit $f_n(x)= \sqrt{1 + x}\; e^{-\frac{x}{n}}$; $x \ge -1$ et $n > 0$, on désigne par C_n la courbe de f_n.
1)Mque toutes les courbes C_n passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.
2)a)Mque pour tout n>0, la courbe C_n admet une tangente horizontale en un point M_n.
b)On désigne par α_n l'abscisse de M_n.
Etudier la nature de la suite (α_n)
3)Etudier la position relative des courbes C_n et C_{n+1}.

4)On pose $I=\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}\, dx$ et on désigne par (A_n) la suite définie par $A_n= \displaystyle\int_{-1}^{1} f_n(x)\, dx$

a)calculer I
b)Mque pour tout n >0 ; $1- e^{\frac{1}{n}} \le e^{-\frac{1}{n}} -1$
c)En déduire que pour tout $x \in[-1, 1]$, $\left| e^{-\frac{x}{n}} -1 \right| \le e^{\frac{1}{n}} -1$
d)Mque $\left| A_n - I \right| \le \frac{4}{3}\sqrt{2}\, (e^{\frac{1}{n}} -1)$
e)En déduire que la suite (A_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 42 :

Soit (o, i, j, k) un repère orthonormé de l'espace.
On considère les points
A(3, -2, 2) , B(6,1,5) et C(6,-2,-1)
1)Mque le triangle ABC est rectangle
2)Soit P :x + y + z – 3 = 0.
mque P est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
3)Soit P' le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A.
Déterminer une équation cartésienne de P'.
4) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, droite d'intersection des plans P et P'.
5)Soit D(0, 4, -1).
a)Mque (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
b)Calculer le volume du tétraèdre ABDC.
c)Mque l'angle BDC a pour mesure $\frac{\pi}{4}$
6)a)Calculer l'aire du triangle BDC.
b)En déduire la distance du point A au plan (BDC)

Exercice 43:

A) Soit $f(x)= \dfrac{e^x}{\sqrt{1+ e^{2x}}}$
1)a)Etudier les variations de f
b) Montrer que la courbe C de f admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
Tracer C de f.
2)a)Montrer que f est une bijection de IR sur un intervalle J à préciser.
b) Soit g la fonction réciproque de f et (C') sa courbe.
Montrer que $g(x)=\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)$, $x \in J$ et tracer C'.

B)1)Soit φ la fonction définie par :$\varphi(x)= f(x)-x$; Etudier les variations de φ et montrer qu'il existe un réel unique α tel que $\varphi(\alpha)=0$ et $\ln 2<\alpha<1$

2) On pose $I = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} \ln\left(\frac{x^2}{1 - x^2}\right)dx$

a)En utilisant une intégration par partie, Calculer I.
b) En déduire en fonction de α, l'aire de la partie (K) du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les deux axes.
3) On définit la suite (u_n) par :$u_0=0$ et $u_{n+1}= f(u_n), n\in IN$
a)Montrer que $\forall n\in IN$, $0 \le u_n < \alpha$
b) Etudier le sens de variation de (u_n).
En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

c) Soit (v_n), $v_n=\dfrac{1}{\alpha-u_n} \displaystyle\int_{u_n}^{\alpha} f(x)dx$, $\forall n\in IN$

Mque $u_{n+1} \le v_n \le \alpha$, $\forall n\in IN$, En déduire la lim v_n.

Exercice 44:

A) Soit $f(x)=\frac{1}{\sin x}$, $x \in]0,\frac{\pi}{2}]$,
on désigne par C sa courbe représentative.
1) Etudier f et construire sa courbe C.
2) Vérifier que $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}]$, $f(x)=\frac{1+\tan^2(\frac{x}{2})}{2\tan(\frac{x}{2})}$

puis déduire une primitive de f sur $]0,\frac{\pi}{2}]$

3) Calculer la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C et les droites d'équations

$y=0$, $x=\frac{\pi}{3}$ et $x=\frac{\pi}{2}$

4)a)que f est une bijection de $]0,\frac{\pi}{2}]$ sur $[1,+\infty[$

b) Soit g = f-1, calculer g(1), g($\sqrt{2}$) et g(2).

c)M que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $g'(x)=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

B) Soit $F(x)=\int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln x}\frac{dt}{\sqrt{e^{2t}-1}}$, $x \in]1,+\infty[$

1)a)Mque F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer F'(x).

b)En déduire que $\forall x \in]1,+\infty[$ on a : $F(x)=\frac{\pi}{4}-g(x)$.

c) Trouver lim F(x) en $+\infty$ et lim F(x) en 1.

Exercice 45:

A)Soit f (x)=ln(e^x+1)
1)Etudier les variations de f_1
2)a) Montrer que f(x)=x+ln(e^{-x}+1)
b) Déduire de ce qui précède que la courbe C de f admet deux asymptotes dont on déterminera les équations
3) Construire la courbe C de f.

B) Soit $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

1) Montrer que F est dérivable sur IR et déterminer le sens de variation de F.
2) a) Montrer que $\forall$ t $\geq$0, ln (1+t) $\leq$ t,
établir alors que pour tout x $\leq$ 0, F(x) $\geq$ -1.
b) Montrer que, en effectuant une intégration par parties que $F(x)= x\ln(e^x+1)+\int_x^0\frac{te^t}{e^t+1}dt$

c) Calculer $\int_x^0 te^t dt$.

Montrer alors que $\forall x\leq 0$, $\int_x^0\frac{te^t}{e^t+1}dt \leq (1-x)e^x-1$

d) Donner un encadrement de F(x) pour x $\leq$0,
puis déduire limF(x) en $-\infty$

3)a) Mque $\forall x\in$IR, on a : $F(x)=\frac{x^2}{2}+\int_x^0\ln(1+e^{-t})dt$

b) En déduire limF(x) en $+\infty$ et lim $\frac{F(x)}{x}$ en $+\infty$

4) Donner l'allure de la courbe C' de F.

Exercice 46:

Pour tout n >0 et pour tout x réel négatif, on pose

$F_n(x)=\int_x^0\frac{e^{nt}}{1+e^t}dt$

1)a)Calculer $F_1(x)$ et déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty}F_1(x)=\ln(2)$

b)Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}F_2(x)$; ($\frac{e^{2x}}{1+e^x}=e^x-\frac{e^x}{1+e^x}$)

2)a)Mque pour tout n >0, on a :$F_{n+1}(x)+F_n(x)=\frac{1}{n}(1-e^{nx})$

b)Mque par récurrence sur IN, que $F_n(x)$ admet une limite finie lorsque x tends vers $-\infty$.
On pose dans la suite $R_n=\lim\limits_{x\to-\infty}F_n(x)$

3)a)Vérifier que pour tout t $\leq$0, $2e^t \leq 1+e^t \leq 2$
b)Mque pour tout entier n >2 et pour tout réel x $\geq$0,
on a : $\frac{1}{2n}(1-e^{nx}) \leq F_n(x) \leq \frac{1}{2(n-1)}(1-e^{(n-1)x})$
c)En déduire un encadrement de R_n, pour n $\geq$2
4)Pour tout réel négatif x et pour tout entier n>0,

on pose : $G_n(x)=(-1)^n\int_x^0 e^{nt}dt$

a)Calculer $G_n(x)$ et mque $\lim\limits_{x\to-\infty}G_n(x)=\frac{(-1)^n}{n}$

b)Mque $G_1(x)+G_2(x)+\ldots+G_n(x)=-F_1(x)+(-1)^nF_{n+1}(x)$

5)On pose, pour tout entier n>0, $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$

a)Mque $u_n=\ln(2)+(-1)^{n+1}R_{n+1}$
b)Mque la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite

Exercice 47:

Soit $f(x)=\sqrt{1+x}\,e^{-x}$; x $\geq$ -1
1)a)Etudier la dérivabilité de f en -1+
b)Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
c)Calculer la limite de f en $+\infty$
d) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2)Dresser le tableau de variation de f.
3)Donner une équation de la tangente à Cf au point d'abscisse 0.
4)Mque l'équation f(x)=x admet une unique solution α dans $]-\frac{1}{2},+\infty[$ et que $\alpha \in]\frac{1}{2},1[$
5)Tracer la courbe C de f
6)a)Mque $1+x \leq e^x$, pour tout réel x

b)En déduire que $\forall$ x ≥ -1, on a : $f(x) \le e^{-\frac{x}{2}}$

7)Soit $\lambda \ge 1$ et $S(\lambda)=\int_1^{\lambda} f(x)dx$

a)Donner une interprétation graphique du réel $S(\lambda)$

b)Mque pour tout $\lambda \ge 1$, on a : $0 \le S(\lambda) \le \frac{2}{\sqrt{e}}$

Exercice 48:

1)Soit $f(x) = x + \ln(\frac{x}{2x+1})$

a)Etudier les variations de f

b)Mque la droite Δ :y = x - ln2 est asymptote à C

Etudier la position de Cf par rapport à Δ

c)Mque l'équation f(x)=0 admet une seule solution α

et que $\alpha \in]1, \frac{5}{4}[$

2)Soit $g(x)= (2x+1)e^{-x}$

a)Etudier les variations de g et Tracer la courbe de g

b)Soit b >0. Déterminer l'aire A(b) de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la courbe Cg et la droite :x=b

c)L'aire A(b) admet-elle une limite qd b tend vers $+\infty$

3)Mque α est solution de l'équation g(x)=x

4)Mque si $1 \le x \le \frac{5}{4}$ alors $1 \le g(x) \le \frac{5}{4}$

5)a)En étudiant le signe de g'' et les variations de g',

montrer que pour tout $x \in [1,\frac{5}{4}]$, $-\frac{1}{2} \le g'(x) \le \frac{1}{2}$

b)En encadrant $\int_a^b g'(x)dx$,

dem que $\forall$ a et b dans $[1,\frac{5}{4}]$, $|g(b) - g(a)| \le \frac{1}{2} |b - a|$

6)Soit u la suite définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=g(u_n)$, $n\in IN$

a)Mque pour tout n ; $1 \le u_n \le \frac{5}{4}$

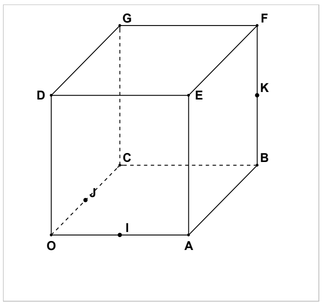
b)Prouver que pour tout n, $|u_{n+1}- \alpha| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

En déduire que pour tout n ; $|u_n - \alpha| \le \frac{1}{2^{n+2}}$

Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

c)Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée à 10^{-3} prés de α et donner une valeur.

Exercice 49



L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$, on considère le cube OABCDEFG.
On note I, J et K sont les milieux des arêtes [OA], [OC] et [BF].

1)a- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{DI} \wedge \overrightarrow{DJ}$

b- En déduire qu' une équation cartésienne du plan P = (DIJ) est : $2x + 2y + z - 1 = 0$

2) a- Montrer que la droite (OK) est perpendiculaire au plan P.

b- Soit S la sphère de centre K passant par O.
Montrer que S et P sont sécants suivant un cercle $\mathcal{C}$ dont on déterminera le centre H et le rayon.

3) Soit Ω le point d'intersection des droites (OK) et(BD) et S' sphère de centre Ω et passant par O

a- Vérifier que Ω $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

b- Déterminer le rapport de l'homothétie de centre O qui transforme S en S'.

c- Soit Q le plan parallèle à P passant par O.
Montrer que Q est tangent à la sphère S en O.
Déduire la position relative de la sphère S' et du plan Q.

Exercice 50:

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1)On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. On désigne pr X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

a)Quelles sont les valeurs prises par X ?

b)Donner la loi de probabilité de X.

2)On effectue maintenant n tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet dans l'urne. Soit $1 \le k \le n$ et N : la k-ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches.

A : On obtient une boule blanche dans chacun des k-1 premiers tirages et une boule noire au k-ième.

B : On obtient une boule blanche dans chacun des n-k derniers tirages.
Calculer p(A), p(B/A) et p(N).

Exercice 51

Un fabricant de jouets vend un modèle de poupée qui "parle et marche" grâce à un mécanisme électronique. On appelle "durée de vie" d'une poupée le temps

pendant lequel le mécanisme fonctionne correctement avant la première défaillance.
La variable aléatoire T , représentant la durée de vie exprimée en années d'une poupée prise au hasard dans la production, suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{3}$

1) a) Déterminer la probabilité **p** qu'une poupée ne fonctionne plus au bout d'une année.
b) Exprimer, en fonction de t, la probabilité P(T > t) qu'une poupée n'ait aucune défaillance pendant t années.

2) J'ai acheté une poupée. On note A l'évènement : "la poupée n'a aucune défaillance pendant une année" et B l'évènement : "la poupée n'a aucune défaillance pendant trois ans".
a) Déterminer les probabilités P(A) et P(B) des événements A et B.
b) Sachant que la poupée fonctionne parfaitement au bout d'un an,quelle est la probabilité que la poupée fonctionne encore au bout de trois ans ?

3) Le fabricant garantit les poupées pendant un an et s'engage à rembourser les poupées défectueuses.
a) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près du pourcentage de poupées remboursées.
b) Quelle durée de garantie maximale t_0 devrait proposer le fabricant pour qu'il ne rembourse pas plus de 8% des poupées vendues ?

4) Un commerçant achète un lot de trois poupées et le fabricant offre, pour chaque poupée, une garantie d'une année. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de poupées remboursées sur ce lot.
a)Donner la loi de probabilité de X. Les probabilités seront exprimées en fonction de **p**.
b) Déterminer, en fonction de **p**, l'espérance mathématique E(X) de la variable X.

Exercice 52

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

1) On considère la parabole P :y= 4x²
   a) Déterminer le foyer F et la directrice D de P puis tracer P.
   b) Soit A le point de P d'abscisse 4 et d'ordonnée strictement positive. Déterminer une équation de la tangente T à P au point A puis la tracer. Cette tangente coupe la directrice D en B. Montrer que le triangle AFB est rectangle.
2) Soit H : x²-y²-2x-15=0. Caractériser H puis le tracer.
3) Soit l'ellipse E : $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$
   a) Déterminer le centre, les sommets ; les foyers et l'excentricité de E
   b) Tracer E dans le même repère.
4) Soit dans C l'équation : $z^2-2(1+3\cos\theta)z+5\cos^2\theta+5=0$ où $\theta \in]0,\pi[$.
   a) Résoudre E
   b) Montrer que pour tout $\theta \in]0,\pi[$, le point M d'affixe $z=1+3\cos\theta+2i\sin\theta$ est un point de E
   c) Existe-t-il une valeur de θ pour laquelle M est un point de P ?
5) Déterminer les équations des tangentes à E issues du point K(1, 3).

Exercice 53 (5 points)

Soit f la fonction définie sur [0, +∞[par :
$f(x)=\frac{x+1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ si $x \neq 0$ et f(0) = 0.

1) a/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
b/ Dresser le tableau de variation de la fonction f.
c/ Tracer dans un repère orthonormé (unité 2cm) la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f.

2) a/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.
b/ Tracer la courbe ($\mathcal{C}'$) représentative de f^{-1}.

3) x étant un réel tel que 0 < x ≤ 1.
a/ Calculer $G(x)=\int_x^1 t\,f'(t)dt$.
b/ On pose $F(x)=\int_x^1 f(t)dt$. Exprimer F(x) + G(x) en fonction de x.
c/ Expliciter alors F(x).

4) a étant un réel tel que 0 < a < 1
a/ Calculer l'aire A(a) de la partie du plan limitée par ($\mathcal{C}$), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = a et x =1.
b/ Calculer la limite de A(a) quand a tend vers 0 à droite.
c/ En déduire l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par ($\mathcal{C}$) , ($\mathcal{C}'$) et les droites d'équations respectives x = 1 et y = 1.

5) n étant un entier naturel tel que n ≥ 2.
a/ Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet une solution unique $u_n \in]0,+\infty[$.
b/ Montrer que la suite (u_n) est décroissante puis qu'elle est convergente.
c/ Calculer la limite de (u_n).

Exercice 54;(6 points)

1) On considère l'équation différentielle : (E) :
$y'-3y=\frac{-3e}{(1+e^{-3x})^2}$.

On donne une fonction g dérivable sur IR et la fonction f définie sur IR par :$f(x) = e^{-3x}g(x)$.

a) Montrer que f est dérivable sur IR puis expliciter f' (x) en fonction de g et g'.

b) Déterminer la fonction f de sorte que g soit solution de (E) sur IR et vérifie $g(0) = \frac{e}{2}$.

2) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = e^{\frac{e^{-3x}}{1+e^{-3x}}}$. On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Tracer la courbe C.

c) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} que l'on explicitera.

3) Soit h la fonction définie sur IR par :$h(x) = \frac{e^{1+3x}}{1+e^{3x}}$.

On désigne par C'sa courbe représentative dans le même repère.

Pour tout réel x , on appelle P le point de C d'abscisse x et M le point de C' d'abscisse x.

On note K = P*M

a) Montrer que le Point K varie sur une droite fixe quand x varie sur IR.

b) Déduire que la courbe de h est l'image de celle de f par une symétrie orthogonale que l'on précisera puis construire C'.

c) Déduire que la courbe de f^{-1} est l'image de la courbe C' par un déplacement que l'on précisera.

4) a) Déterminer l'aire A(α) de la partie du plan limitée par les courbes C , C' et les droites d'équations x = 0 et x = α où α est un réel strictement positif.

b) Calculer la limite de A(α) quand α tend vers + ∞.

5) On définit sur IN* la suite (u_n) par

$u_n = \int_0^1 f(x)e^{\frac{x}{n}}dx$

a) Etudier la monotonie de la suite u.

b) La suite u est-elle convergente ?

c) Montrer que pour tout n de IN* :

$$\int_0^1 f(x)dx \le u_n \le e^{\frac{1}{n}} \int_0^1 f(x)dx$$

d) En déduire la limite de la suite u. Donner sa valeur exacte.

Exercice 55:

On considère l'équation différentielle

(E) :y'+y=x+2.

1) Résoudre (E') : y'+y=0

2) Soit u et v deux fonctions dérivables sur IR telle que v(x)=u(x)-(x+1)

a) Montrer que u est une solution de E ssi v est une solution de E'

b) Déterminer la solution de E qui prend la valeur 0 en 0

3) Soit n > 0 et f_n la fonction définie sur IR par $f_n(x)=1+x-e^{nx}$

a) Dresser le tableau de variations de f_n puis construire la courbe C_1 de f_1

b) Montrer que $f_n(x)=1$ admet dans]0, + ∞[une unique solution un et que $0 < u_n < 1$

c) Montrer que la suite un est décroissante

(On pourra étudier la signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$) puis qu'elle est convergente

d) Montrer que pour tout n > 1 ; $u_n = e^{-nu_n}$, en déduire la limite de un