Exercice n°1 :

Soit f la fonction définie sur $[0,\frac{1}{2}[$ par $f(x)=\frac{1}{\cos(\pi x)}$

1°) Dresser le tableau de variation de f.

2°) Mq f réalise une bijection de $[0,\frac{1}{2}[$ sur un intervalle J à préciser

3°) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 1.

4°) Prouver que f^{-1} est dérivable sur $J\setminus\{1\}$

5°) Démontrer que $\forall x\in J\setminus\{1\}$ $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{\pi x\sqrt{x^2-1}}$

Exercice n°2

Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\sin(\frac{\pi}{2}x)}}$

1°) Mq f est dérivable sur $[0,1]$ et calculer $f'(x)$

2°) Mq f réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[\frac{1}{\sqrt{2}},1]$.

3°) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur $[\frac{1}{\sqrt{2}},1]$

4°) $\forall x\in]\frac{1}{\sqrt{2}},1]$, trouver $\sin(\frac{\pi}{2}f^{-1}(x))$ et $\cos(\frac{\pi}{2}f^{-1}(x))$ puis calculer $(f^{-1})'(x)$

5°) Soit $n\geq 4$ et $(S_n)_{n\in I}$ la suite définie par :

$$S_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=4}^{n}f^{-1}\left(1-\frac{1}{k}\right).$$

a) Mq $\forall k\geq 4$ on a $f^{-1}(1-\frac{1}{n})\leq f^{-1}(1-\frac{1}{k})\leq f^{-1}(\frac{3}{4})$

b) Déduire un encadrement de S_n $\forall n\in I$.

c) Préciser donc $\lim_{n\to+\infty}S_n$

Exercice n°3 :

Soit F la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par $F(x)=1-\sin x$.

Soit F la fonction de variation de F.

1°) a) Dresser le tableau de variation de F.

b) Mq F réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}]$ sur $[0,1]$.

Mq $F(x)=x$ admet dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ une unique solution α.

2°) Mq $F(x)=x$ admet dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ une unique solution α et calculer $(F^{-1})'(\alpha)$.

3°) a) Mq F^{-1} est dérivable en α et calculer $(F^{-1})'(\alpha)$.

b) Mq $\forall x\in]0,1]$ on a $(F^{-1})'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$.

4°) Soit $H(x)=x+F^{-1}(1-\cos x)$, $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

a) $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}]$ Calculer $H'(x)$ puis $H(\frac{\pi}{2})$.

b) En déduire que pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ on a : $F^{-1}(1-\sin x)+F^{-1}(1-\cos x)=\frac{\pi}{2}$.

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

Exercice n°4 :

Soit la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \tan^2 x$.

1°) Mq f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$.

2°) Mq f^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in]0, +\infty[$ on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}.$$

3°) pour tout $x \in]0, +\infty[$ on pose $g(x) = f^{-1}(x^2) + f^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

a) Mq g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $g'(x)$.

b) En déduire que $\forall x \in]0, +\infty[$ on a : $f^{-1}(x^2) + f^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice n°5 :

Soit f la fonction définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

A] 1°) Etudier les variations de f.

Déduire qu'elle réalise une bijection de $]-1,1[$ sur un intervalle J à préciser

2°) Construire dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ respectivement de f et f^{-1}

3°) Soit $x \in \mathbb{R}$, determiner $f\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$. Interpreter.

B] Soit h la fonction définie sur $]-1, 1[$ par $h(x) = f(\sin \frac{\pi}{2} x)$

1°) a) verifier que pour tout $x \in]-1, 1[$ on a $h(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} x\right)$.

b) Mq h admet une fonction reciproque g définie sur $\mathbb{R}$.

c) Mq g est derivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}$.

d) Calculer $g(1)$

2°) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par $\varphi(x) = g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) Mq φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et $\varphi'(x) = 0$.

b) Calculer $\varphi(1)$. déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$ on a $\varphi(x) = 1$

3°) Soit (U_n) et (V_n) les suites définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \sum_{k=1}^{n} \left[g\left(1+\frac{1}{k}\right) + g\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]$

et $V_n = \frac{U_n}{n}$

a) Donner la valeur de $\varphi\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

b) Verifier que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{k}{1+k} = 1 - \frac{1}{k+1}$.

Déduire que $g\left(1+\frac{1}{k}\right) + g\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$

c) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n = n - g\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

Déduire que la suite (V_n) est Convergente vers 1.

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

__Exercice n°6__

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$ par $\begin{cases} f(x) = \dots \frac{\dots}{4} \dots \\ f(x) = \sqrt{1+\tan \pi x} & \text{si } x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[\end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1°) a) Vérifier que f est continue en $-\frac{1}{4}$.

b) Etudier la dérivabilité de f en $(-\frac{1}{4})$ et interpréter.

c) Mq f est dérivable sur $]-\infty, -\frac{1}{4}[$ et $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$ et calculer $f'(x)$.

d) Dresser T.V de f

e) Tracer $(\mathcal{C}_f)$

2°) Soit g la restriction de f sur $[-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}]$.

a) Mq g réalise une bijection de I sur un intervalle J qu'on précisera et tracer $\mathcal{C}'$ de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.

3°) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$.

a) Mq h réalise une bijection de $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$ sur $\mathbb{R}_+$. On notera Ψ sa réciproque.

b) Mq Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\Psi'(x)$ pour tout réel x de $\mathbb{R}_+$

__Exercice n°7 :__

Soit φ la fonction définie sur $[0,1]$ par $\varphi(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$.

1°) Mq φ est une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$. Préciser le domaine de continuité et le sens de variation de φ. Soit Ψ sa réciproque.

2°) Etudier la dérivabilité de Ψ. Donner l'expression de $\Psi'(x)$.

3°) On considère la fonction k définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par $k(x) = \Psi(2x\sqrt{1-x^2}) - 2\Psi(x)$

a) Mq k est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$ et calculer $k'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$; $\Psi(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\Psi(x)$

__Exercice n°8__

Soit la fonction f définie sur $[0, \pi[$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x} & \text{si } x \in]0, \pi] \\ f(0) = 0. \end{cases}$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a - Mq f est continue à dte en 0

Mq f est dérivable à dte en 0 et $f'_d(0) = \frac{1}{2}$.

b - Mq pour tout réel x de $[0, \pi[$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$.

c - Mq

2°) Mq $f(x) = x$ admet dans $]0, \pi[$ une solution unique α et que $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

b - Calculer f ...

c - Tracer dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $\mathcal{C}$ et la courbe $\mathcal{C}'$ de f

4°a/ vérifier que pour tout $x \in [0,\pi[$ on a : $f^2(x) = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

En déduire $\cos x$ en fonction de $f^2(x)$

b/ mq f^{-1} est dérivable sur J et que pour tout x de J on a $(f^{-1})'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$

5°) Soit la fonction h définie sur $[0,1]$ par : $\begin{cases} h(x) = f^{-1}(x) - f^{-1}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } x \in [0,1[\\ h(1) = \dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$.

a) mq h est continue à gauche en 1

b) mq h est dérivable sur $[0,1[$ et calculer $h'(x)$; pour tout $x \in [0,1[$.

c) En déduire que pour tout $x \in [0,1[$; $f^{-1}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \dfrac{\pi}{2} + f^{-1}(x)$

6°) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(\alpha + \dfrac{1}{n+k}\right)$

a) mq pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\alpha + \frac{1}{2n}\right) \leq U_n \leq \frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)$$

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math