Exercice 3 (4 points)

Pour tout entier naturel $p \geq 2$, on pose $N_p = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k$.

I/ ① Déterminer, suivant l'entier naturel n, le reste modulo 7 de 10^n.

② Montrer que $N_p \equiv 0 \pmod 7$ si et seulement si $9N_p \equiv 0 \pmod 7$.

③ Montrer que $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$.

④ Déterminer l'ensemble des entiers naturels $p \geq 2$ tels que $N_p \equiv 0 \pmod 7$.

II/ ① Soit un entier naturel $n \geq 2$ tel que $n^2 \equiv 1 \pmod{10}$.

a) Montrer que $n \equiv 1 \pmod{10}$ ou $n \equiv -1 \pmod{10}$.

b) En déduire que $n^2 \equiv 1 \pmod{20}$.

② a) Montrer que $N_p \equiv 11 \pmod{20}$.

b) N_p est-il un carré parfait ?

Exercice 4 (3.5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x\left(1+\ln^2(x)\right)}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① Dresser le tableau de variation de f.

② Tracer C_f.

③ Soit F la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $F(x) = \int_1^{e^{\tan x}} f(t)\,dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $F'(x)$ pour tout $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) Expliciter $F(x)$ pour tout $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f et les droites d'équations $x = 1, x = e$ et $y = 0$.

Exercice 5 (5 points)

Dans l'annexe (II) on a représenté, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1-e^{-x}}$.

① a) Justifier, graphiquement, que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α non null.

b) Montrer que $0.7 < \alpha < 0.8$.

② a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J à préciser.

b) Tracer C_g la courbe représentative de la fonction g.

c) Expliciter $g(x)$ pour tout $x \in J$.

③ Montrer que l'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par C_f et les droites d'équations

0,75 $x=0, x=\alpha$ et $y=0$ est égale à $-2\alpha+\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$.

④ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\int_0^{\alpha}(f(t))^n dt$.

0,5 a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+2}-u_n=\frac{-2}{n+2}\alpha^{n+2}$.

0,5 b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{2n}=\alpha-\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^{2k}}{k}$.

0,5 c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{2n+1}=\ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)-2\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}$.

0,5 d) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\le u_n\le\alpha^{n+1}$.

0,5 e) En déduire $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^{2k}}{k}$ et $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}$.