Exercice 1 : 5 points

L'unité graphique est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un losange OABC tel que :

$OA = 7$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) = \frac{\pi}{3}$

E est le point du segment $[OB]$ *tel que :* $OE = OA$

F est le point de la demi-droite $[OC)$ *tel que :* $CF = EB$ et $C \in [OF]$

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des côtés $[OA]$, $[AB]$, $[BC]$ *et* $[OC]$.

On désigne par (Δ) *la médiatrice du segment* $[OA]$ *et par* (Δ') *celle de* $[BC]$.

1) *Fais une figure.*
2) a) *Justifie que les droites* (Δ) *et* (Δ') *sont parallèles.*

   b) *Justifie que le triangle OAC est équilatéral.*

   c) *Justifie que :* $OB = OF$.
3) *Soit* R_1 *la rotation de centre O et d'angle* $\frac{\pi}{6}$ *et* R_2 *la rotation de centre A et d'angle* $-\frac{2\pi}{3}$.

   On pose : $f = R_1 o R_2$

   a) *Déterminer* $f(O)$ *et* $f(A)$.

   b) *Démontrer que f est une rotation d'angle* $-\frac{\pi}{2}$.

   c) *Déduire de ce qui précède que* $(EF) \perp (OA)$ *et* $EF = OA$.

   d) *Construis le centre* Ω *de f.*
4) a) *Justifie qu'il existe une isométrie g et une seule telle que :* $g(O) = A$, $g(A) = C$ *et* $g(C) = B$.

   b) *Justifie que g est un antidéplacement.*

   c) *Démontrer que g est une symétrie glissée.*
5) *Dans cette partie, on se propose de caractériser la symétrie glissée g.*

   Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ *et S la symétrie orthogonale d'axe* (Δ) .

   a) *Démontrer que :* $g = RoS$

   b) *Déterminer l'axe de la symétrie orthogonale* S_1 *telle que :* $R = S_{(AB)} o S_1$

   c) *Déduis de ce qui précède que :* $g = S_{(AB)} o t_{\vec{u}}$ *où* $\vec{u}$ *est un vecteur que l'on caractérisera.*

   d) *En utilisant la relation* $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JB}$, *détermine les éléments caractéristiques de g.*

Exercice 2 : 4 points

Dans une sordide d'affaire, les polices scientifiques de Tunis, Sfax et Sousse coopèrent afin de confondre le coupable. Sur les lieux du crime, il y avait onze personnes présentes, et il n'y a pas de doute que le coupable est parmi elles. On trouve sur les lieux du crime un fragment de cheveu qui ne peut appartenir qu'au coupable.

Les équipes de Sousse et de Sfax mettent en place deux tests pour identifier le coupable à partir de ce fragment.

Les deux tests sont positifs avec certitude si la personne testée est le coupable, mais les deux tests sont également positifs dans 10% des cas si la personne testée est innocente.

1) *Montrer que pour toute probabilité et pour deux événements* E_1 *et* E_2 *tels que* $p(E_1)=1$ *et* $p(E_2)=1$ *alors* $p(E_1 \cap E_2)=1$.

Dans la suite, on notera pour une personne prise au hasard :

T_1 *: l'événement « Le test 1 est positif »*

T_2 *: l'événement « Le test 2 est positif »*

C : l'événement « La personne est coupable »

On suppose que chaque suspect à la même probabilité que les autres d'être choisi au hasard parmi les onze suspects.

2) *Donner une écriture simple de l'événement I : « La personne est Innocente » et de l'événement T : « Les résultats aux deux tests sont positifs »*
3) *Quelle est la probabilité qu'un suspect prix au hasard soit le coupable sachant que le test 1 est positif ?*

Les deux équipes de Sousse et Sfax se rendent compte que pour les personnes innocentes un résultat positif avec le test 1 et un résultat positif avec le test 2 sont des événements indépendants. Plus formellement T_1 *et* T_2 *sont conditionnellement indépendants sachant I.*

4) *Grâce au résultat de la question 1, déterminer la probabilité que les tests 1 et 2 soient tous les deux positifs sachant que la personne est coupable.*
5) T_1 *et* T_2 *sont-ils indépendants ?*
6) *Quelle est la probabilité d'avoir affaire au coupable lorsque les deux tests 1 et 2 sont administrés à une même personne et sont positifs ?*
7) *L'équipe de Tunis entre en scène et imagine un autre test (le test 3) qui est tel qu'aucune personne non-coupable ne puisse être positive à la fois au test 2 et au test 3. Comme les deux autres tests, le test 3 est positif avec certitude si la personne testée est coupable. Proposez une procédure pour découvrir de manière certaine le coupable (et justifiez).*

Exercice 3 : 4 points

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n tel que $n^3 \equiv 2021[10^4]$

1) *Soit a et b deux entiers naturels non nuls et* $m \in \mathbb{N}$

Montrer que $\left.\begin{matrix} m \equiv 0[a] \\ n \equiv 0[b] \\ a \wedge b = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m \equiv 0[ab]$

2) *Déterminer le reste de la division euclidienne de* 2021^4 *par 16 . En déduire que* $2021^{8001} \equiv 2021[16]$.

3) *On considère la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $U_0 = 2021^2 - 1$ *et* $U_{n+1} = (U_n + 1)^5 - 1, n \in \mathbb{N}$

a) *Démontrer, en utilisant la formule de binôme de Newton que pour tout entier naturel n :*

$U_{n+1} = U_n \times \left[U_n^4 + 5\left(U_n^3 + 2U_n^2 + 2U_n + 1\right)\right]$

b) *Démontrer par récurrence que,* $\forall n \in \mathbb{N}$, U_n *est divisible par* 5^{n+1}

c) *Vérifier que* $U_3 = 2021^{250} - 1$ *, en déduire que* $2021^{8001} \equiv 2021[5^4]$

4) *Déterminer un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2021.*

Exercice 4 : 7 points

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ *Par* $\begin{cases} f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) a) *Montrer que f est continue à droite en 0.*

b) *Montrer que f est dérivable à droite en 0.*

2) *On considère F définie sur* $[0, +\infty[$ *par* $F(x) = \int_x^1 f(t)\ dt$.

a) *Montrer que F est continue sur* $[0, +\infty[$.

b) *Montrer à l'aide d'une par intégration par parties* $\forall x > 0$, $\int_x^1 e^{\frac{-1}{t}}\ dt = e^{-1} - xe^{\frac{-1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{\frac{-1}{t}}\ dt$.

c) *Montrer que* $\int_0^1 f(t)\ dt = e^{-1}$.

3) *On considère la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie sur IN par* $U_n = F(n) - F(n+2)$.

a) *Montrer que, pour tout entier* $n > 0$ *, il existe* $V_n \in [n, n+2]$ *tel que* $U_n = 2\left(1 + \frac{1}{v_n}\right)e^{-\frac{1}{V_n}}$.

b) *Montrer que, pour tout entier* $n > 0$ *, on a :* $2\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq 2\left(1 + \frac{1}{n+2}\right) e^{-\frac{1}{n+2}}$.

c) *Déduire* $\lim_{n\to+\infty} U_n$

4) a) Montrer que, pour tout entier $n \in IN^*$ il existe $a_n \in]0\,,1[$ tel que $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$.

b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

c) Vérifier que, pour tout entier $n > 0$: $\frac{-1}{a_n} + ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{-1}{n}$.

d) Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, on a : $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$.

e) Montrer que , pour tout réel $x \geq 0$, on a : $-\frac{x^2}{2} \leq -x + ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

5) Soit n un entier supérieur ou égal à 4.

a) Vérifier que $a_n \geq 1$.

b) Montrer que $1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \leq 1$.

c) Montrer que $a_n \geq \sqrt{\frac{n}{6}}$, déduire $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

d) Trouver $\lim_{n\to+\infty} a_n\sqrt{\frac{2}{n}}$.