❖ Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ ❖

Exercice 1

On considère la suite (x_n) définie par : $\begin{cases} x_0 = 27 \\ x_{n+1} = 3x_n - 4. \end{cases}$

1. a) Calculer x_1, x_2, x_3 et x_4.
   b) Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de x_n ?
2. a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $x_{n+2} \equiv x_n[8]$.
   b) Déduire que pour tout entier naturel n on a : $x_{2n+1} \equiv 5[8]$ et $x_{2n} \equiv 3[8]$.
3. Pour tout entier naturel n on pose $y_n = x_n - 2$.
   a) Montrer que (y_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Déduire que pour tout entier naturel n on a : $2x_n = 50 \times 3^n + 4$.
4. a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $2x_n \equiv 54[100]$.
   b) Déterminer suivant n les chiffres des unités et des dizaines de x_n.
5. Montrer que pour tout entier naturel n, $(x_n \wedge x_{n+1}) = 1$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation E : $3x + 7y = 10^{2n}$.
   a) Donner dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une solution particulière de $3x + 7y = 1$ en déduire une solution particulière de E.
   b) Déterminer alors les solutions de l'équation E.
2. Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation E' : $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$.
   a) Soit x un entier relatif, déterminer les restes modulo 7 de $3x^2$.
   b) Soit x un entier, déterminer les restes modulo 7 de 2^n.
   c) En déduire que si (x, y) est une solution de E' alors $3x^2 \equiv 2^n \pmod 7$.
   d) Conclure alors les solutions de E'.

Exercice 3

1. a) Déterminer les restes possibles dans la division Euclidienne par 8 du carré d'un entier.
   b) Déterminer l'ensemble des entier n tels que $(n+3)^2 \equiv 1[8]$.
2. Soit n un entier naturel.
   a) Déterminer les restes possibles dans la division Euclidienne par 5 de 2^n.
   b) En déduire le reste dans la division Euclidienne de 2007^{2008} par 5.
   c) Soit $\mathscr{A}_n = 7^n + 7^{2n} + 7^{3n} + 7^{4n}$. Déterminer l'ensemble des entiers n pour que $5 \mid \mathscr{A}_n$.

Exercice 4

1. On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $\mathbb{E} : 2x - 7y = 3$.
   a. Montrer que si (x, y) est une solution de $\mathbb{E}$ alors y est impair.
   b. En déduire que toute solution de $\mathbb{E}$ est de la forme : $(7k + 5, 2k + 1)$, où $k \in \mathbb{Z}$.
   c. Résoudre alors $\mathbb{E}$.
2. Dans un site web de vente en ligne, les références des articles sont toutes des nombres à quatre chiffres. Le chiffre des unités est le reste dans la division Euclidienne par 7 du nombre composé des trois autres chiffres.
   a. Vérifier que le nombre 8632 peut être la référence d'un article.
   b. Soit p un chiffre tel que le nombre $p795$ est une référence d'un article.
      i. Montrer que le nombre $p79$ est congru à $2p + 2$ modulo 7.
      ii. En déduire qu'il existe un entier relatif y tel que $2p - 7y = 3$.
      iii. Déterminer alors p.

Exercice 5

-I-

1. Déterminer suivant l'entier n le reste dans la division Euclidienne de 3^n par 8.
2. En déduire que $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.
3. Trouver le reste dans la division Euclidienne de $3^{120} - 3^{121} + 3^{122}$ par 8.

-II-

1. a. Trouver un couple d'entiers (u, v) vérifiant $17u + 5v = 1$.
   b. Déduire la résolution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $(\mathcal{E}) : 17x + 5y = 146$.
2. Soit (x, y) solution de $(\mathcal{E})$ et $d = x \wedge y$.
   a. Déterminer les valeurs possibles de d.
3. ne personne achète d' une librairie des cartables à 17 dinars la pièce et des cahiers à 5 dinars la pièce il paye 146 dinars. Déduire de ce qui preécède le nombre de cartables et de cahiers achetés.

Exercice 6

1. Soit $\mathcal{N}$ un entier naturel, montrer que le chiffre des unités de $\mathcal{N}$ est le reste dans la division Euclidienne de $\mathcal{N}$ par 10.
2. Soit n en entier naturel.
   a. Déterminer suivant n, le chiffre des unités de 3^n.
   b. En déduire les chiffre des unités de $\mathcal{A} = 2003^{2010} + 373^{2531}$.
   c. Déterminer suivant n, le chiffre des unités de 9^n.
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, le chiffre des unités de 6^n est 6.
4. Pour tout entier naturel non nul, on considère l'entier $\mathcal{B} = 3^n + 6^n + 9^n$.
   a. Déterminer le chiffre des unités de $\mathcal{B}$.
   b. En déduire le chiffre des unités de $\mathcal{S} = 2003^{2010} + 2006^{2010} + 2009^{2010}$.

Exercice 7

1. a. Soit n un entier naturel. Déterminer le reste dans la dividion Euclidienne de 2^n et de 3^n,par 7.
   b. En déduire les valeurs de n pour que $2^n + 3^n$ est divisible par 7.
   c. Déterminer le reste dans la division Euclidienne de $30^{2007} + 353^{2007} + 225^{2007}$.

2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 7. \end{cases}$

   a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel on a : $u_n = 7 - 11 \times 2^n$.
   b. En déduire suivant n le reste dans la division Euclidienne par 7 de u_n.
   c. Quel est le reste dans la division Euclidienne par 7 de u_{2009}.

Exercice 8

1. a. Montrer que pour tout entier n, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.
   b. En déduire deux entiers u et v tels que $31u - 11v = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $\mathrm{E} : 31x - 11y = 3$.
3. On considère dans $\mathbb{Z}$ le système S : $\begin{cases} x \equiv 2[31] \\ x \equiv 5[11]. \end{cases}$ Montrer que x est une solution de S **si et seulement si** $x \equiv 126[341]$.
4. Soit $\mathrm{N} = 5 - 3 \times 121^{2010}$. déterminer le reste dans la division Euclidienne de N par 341.

Exercice 9

1. On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $E : 8x + 5y = 1$.
   a. Donner une solution particulière de E.
   b. Résoudre E.
2. Soit n un entier relatif tel qu'il existe deux entiers a et b tels que : $\begin{cases} n = 8a + 1 \\ n = 5b + 8 \end{cases}$.
   a. Montrer que le couple $(a, -b)$ est solution de E.
   b. En déduire le reste de la division Euclidienne de n par 40.
3. a. Résoudre léquation $8x + 5y = 100$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   b. Au moyen-Age, un groupe composé d'hommes et de femme a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 piéces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Exercice 10

1. Soit n un entier naturel, on considère les entiers naturel $a = 7n + 9$ et $b = 12n + 15$.
   a. On note $d = a \wedge b$. Calculer $12a - 7b$ et déduire que $d = 1$ ou $d = 3$.
   b. Déterminer n pour que $d = 3$.
2. On donne dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation diophantienne E : $12x - 7y = 3$.
   a. Montrer que si (x, y) est solution de E alors $y \equiv 0[3]$.
   b. Déterminer une solution particulière de E. Résoudre alors E.
3. Un astronome a observé en l'an 2000 un corps cèleste A qui apparait périodiquement tout les 24 ans, 6 ans plus tard il observe un corps B dont la période d'apparition est 14 ans. On appelle J l'an de la prochaine apparition simultanée des deux corps aux yeux de l'astronome.
   a. Soient x et y le nombre de périodes effectués respectivement par A et B entre l'an 2000 et l'an J. Montrer que (x, y) est une solution de E.
   b. Déterminer J.