Lycée pilote de Tunis	**Probabilités conditionnelles 1**	Terminales Maths & S-exp
Mr Ben Regaya. A	**+Eléments de corrections**	www.ben-regaya.net

Exercice 1

A et B deux événements tels que:

$p(A)=0,7;\ p(B)=0,4$ et $p(A\cap B)=0,3$.

Calculer $p(\overline{A})$; $p(\overline{B})$; $p(A\cup B)$;

$p(\overline{A}\cup B)$; $p(\overline{A}\cap B)$; $p(\overline{A}\cup \overline{B})$.

Exercice 2

A et B deux événements tels que:

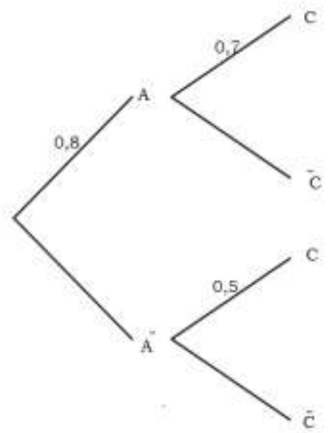
$p(A)=0,7;\ p(B)=0,5$

1. Peut-on avoir $p(A\cap B)=0,1$?
2. Que se passe-t-il si $p(A\cap B)=0,2$ puis si $p(A\cap B)=0,5$?
3. A quel intervalle appartient $p(A\cap B)$?

Exercice 3

On considère deux événements A et C pour une expérience aléatoire. L'arbre ci-contre respecte les conventions habituelles et apporte les informations suivantes :

1. Indiquer la signification des nombres 0,8 ; 0,7 et 0,5. Compléter cet arbre avec les probabilités qui manquent.



2. Calculer $p(A\cap C)$ et $p(\overline{A}\cap C)$; en déduire $p(C)$.
3. Calculer $p(A\cap \overline{C})$ et $p(\overline{A}\cap \overline{C})$.Calculer $p(\overline{C})$
4. Calculer $p_C(A)$.

Exercice 4

On sait que $p(C)=0,3$; $p_C(D)=0,2$ et $p(C\cup D)=0,8$.

Calculer $p(D)$ puis $p_D(C)$.

Exercice 5

On donne $p(A)=0,48;\ p(B)=0,8$ et $p_B(A)=0,4$;

Calculer $p_{\overline{B}}(A)$.

Exercice 6

On suppose que la probabilité de naissance est la même pour les deux sexes, quel que soit le rang de cette naissance. On considère l'ensemble des familles de deux enfants. On choisit une famille au hasard.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :
   - A. « la famille a deux garçons »
   - B. « l'ainé est un garçon »
   - C. « la famille a au moins un garçon »
   - D. « la plus jeune enfant est une fille »
2. Sachant que l'ainé est un garçon, calculer la probabilité pour que la famille ait deux garçons.
3. Calculer $p_C(A)$, $p_D(A)$, $p_A(C)$ et énoncer ces probabilités à l'aide de phrases.

Exercice 7

On considère une mobylette qui n'est pas en très bon état. Soit les événements :

- A. « la mobylette tombe en panne de moteur »
- B. « la mobylette a une crevaison ».

On a : $p(A)=0,06;\ p(B)=0,05$ et les événements A et B sont indépendants.

Quelle est la probabilité pour que la mobylette soit en état de marche ?

Exercice 8

A et B deux événements. On a

$p(A)=\dfrac{1}{4}$; $p(A\cup B)=\dfrac{1}{3}$ et $p(B)=a$.

1. Calculer a dans chacun des cas suivants :
   a) A et B sont incompatibles.
   b) A et B sont indépendants.
   c) A et une partie de B.

2. Dans chacun de ces cas, calculer $p_A(B)$ et $p_B(A)$.

Exercice 9

Trois chasseurs C_1, C_2 et C_3 tirent sur un même éléphant E indépendamment les une des autres. On désigne par p_1, p_2 et p_3 les probabilités respectives pour que les chasseurs C_1, C_2 et C_3 touchent E. Quelle est la probabilité pour que E soit touché par au moins un chasseur ?

Application : $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,2$ et $p_3 = 0,3$.

Exercice 10

Une population de lapins comporte trois fois plus de femelles que de mâles.

Des études statistiques fiables ont montré que 6% des mâles sont albinos et que 40% des femelles ont aussi ce caractère.

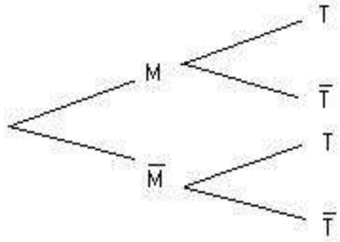
1. Quelle est la probabilité pour qu'un lapin pris au hasard soit albinos ?
2. On choisit un lapin ; il est albinos : quelle est la probabilité
   - pour que ce soit un male ?
   - pour que ce soit une femelle ?

Exercice 11

Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope.

La probabilité pour qu'il achète un téléviseur est de 0,6.
La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est de 0,4.
La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope ?
3. Le client achète un magnétoscope. Quelle est la Probabilité qu'il achète un téléviseur ?
4. Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



Exercice 12

On dispose de deux urnes u_1 et u_2.

L'urne u_1 contient trois boules blanches et une boule noire. L'urne u_2 contient une boule blanche et deux boules noires.

On lance un dé non truqué.

Si le dé donne un numéro d inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne u_1. Sinon on tire une boule dans l'urne u_2. (On suppose que les boules sont indiscernables au toucher)

1. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
2. On a tiré une boule blanche. Calculer le probabilité qu'elle provienne de l'urne u_1.

Exercice 13

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

a) Démontrer que la probabilité de tomber malade est égale à $\frac{5}{48}$

b) Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné ?

c) Le vaccin est-il efficace ?

Lycée pilote de Tunis	Probabilités conditionnelles 1	Terminales Maths & S-exp
Mr Ben Regaya. A	Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice1

$p(\overline{A})=0{,}3$; $p(\overline{B})=0{,}6$; $p(A\cup B)=0{,}6$;

$p(\overline{A}\cup B)=0{,}6$; $p(\overline{A}\cap B)=0{,}1$; $p(\overline{A}\cup\overline{B})=0{,}7$.

Exercice2

1. Peut-on avoir $p(A\cup B)=1{,}2-p(A\cap B)$.

   Impossible.

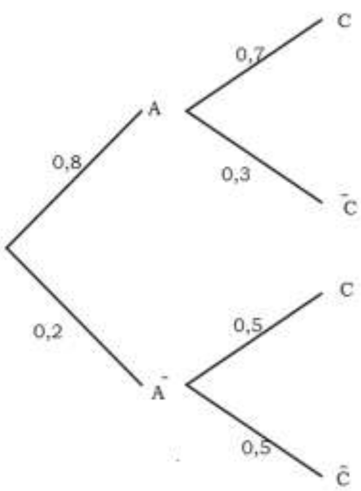
2. $p(A\cup B)=1$. $p(A\cup B)=0{,}7$.

3. Il faut que $0\le 1{,}2-p(A\cap B)\le 1$, et

   $p(A\cap B)\ge 0$ soit $0{,}2\le p(A\cap B)\le 1$.

Exercice3

1. .



2. $p(A\cap C)=0{,}6$; $p(\overline{A}\cap C)=0{,}1$; $p(C)=$ 0,66.
3. $p(A\cap\overline{C})=0{,}24$ et $p(\overline{A}\cap\overline{C})=0{,}10$.

   $p(\overline{C})=0{,}34$.
4. $p_C(A)=\dfrac{28}{33}$.

Exercice4

Puisque $p_C(D)=\dfrac{p(C\cap D)}{p(C)}$ on a $p(C\cap D)=0{,}06$ soit

$p(C\cup D)=0{,}8=p(D)+0{,}3-0{,}06 \Rightarrow p(D)=0{,}56$

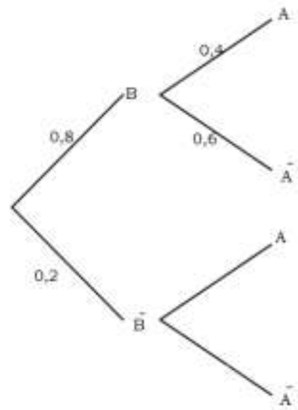
$p_D(C)=\dfrac{0{,}06}{0{,}56}=\dfrac{3}{28}$

Exercice5

$p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap\overline{B})$ donc

$p(A\cap\overline{B})=0{,}48-0{,}32=0{,}16$

Soit $p_{\overline{B}}(A)=\dfrac{p(A\cap\overline{B})}{p(\overline{B})}=\dfrac{0{,}16}{0{,}2}=0{,}8$



Exercice6

1. $p(A)=\dfrac{1}{4}$; $p(B)=\dfrac{1}{2}$; $p(C)=\dfrac{3}{4}$; $p(D)=\dfrac{1}{2}$
2. $p_B(A)=\dfrac{1}{2}$
3. $p_C(A)=\dfrac{1}{2}$, $p_D(A)=0$, $p_A(C)=1$

Exercice7

$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

$=0{,}06+0{,}05-0{,}06\times 0{,}05=0{,}107$ et donc

$1-p(A\cup B)=0{,}893$

Exercice8

1. a) Si A et B sont incompatibles :

   $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$; $a=\dfrac{1}{12}$.

   b) Si A et B sont indépendants :

   $p(A\cup B)=\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}+a-\dfrac{a}{4}$; $a=\dfrac{1}{9}$

   c) *Si A* et une partie de B alors

   $A\cap B=A$; $\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}+a-\dfrac{1}{4}$; $a=\dfrac{1}{3}$.

2. $p=p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}=4p(A\cap B)$

1^{er} cas $\quad p=0$; $\quad 2^{e}$ cas $\quad p=4\times\frac{1}{36}=\frac{1}{9}$;

3^{e} cas $\quad p=4\times\frac{1}{4}=1$.

$q=p_B(A)=\frac{p(B\cap A)}{a}$

1^{er} cas $\quad q=0$; 2^{e} cas $\quad q=\frac{1}{4}$; 3^{e} cas $\quad q=\frac{3}{4}$.

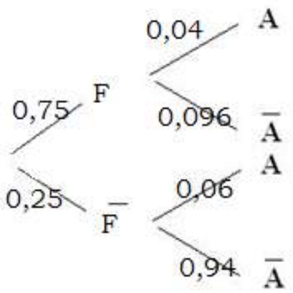
Exercice9

L'événement contraire $\overline{E}$ est réalisé lorsque les trois chasseurs ratent leur cible ; donc :

$p=1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$

<u>Application</u> : $p=0,496$

Exercice10



1. F est l'événement « c'est une femelle» ; A l'événement « il est albinos »

   $p(F)$= 0,75.

   $p(A)=p(A\cap F)+p(A\cap\overline{F})=0,75\times0,004+0,25\times0,06=0,018$

2. $p_A(\overline{F})=\frac{p(A\cap\overline{F})}{p(A)}=\frac{0,015}{0,018}=\frac{5}{6}$.

   $p_A(F)=\frac{1}{6}$

Exercice11

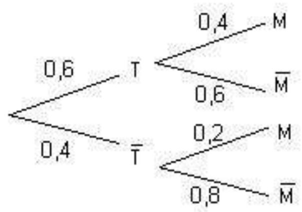
On note T l'événement « le client achète un téléviseur » et M l'événement « le client achète un magnétoscope».

L'énoncé fournit $p(T)$=0,6 (donc $p(\overline{T})$=1-0,6=0,4),

$p_T(M)$=0,4 (donc $p_T(\overline{M})$=1-0,4=0,6), et $p_{\overline{T}}(M)=0,2$

(donc $p_{\overline{T}}(\overline{M})=1-0,2=0,8$),

ce que l'on peut traduire par l'arbre de probabilités



1. En appliquant la formule de définition d'une probabilité conditionnelle,

   $p_T(M)=\frac{p(T\cap M)}{p(T)}\Leftrightarrow$.

   $p(T\cap M)=p(T)\times p_T(M)=0,6\times0,4=0,24$

2. En appliquant la formule des probabilités totales,

   $p(M)=p(T\cap M)+p(M\cap\overline{T})$

   $=p(T)\times p_T(M)+p(\overline{T})\times p_{\overline{T}}(M)$

   $=0,6\times0,4+0,4\times0,2=0,32$

3. On demande

   $p_M(T)=\frac{p(T\cap M)}{p(M)}=\frac{0,6\times0,4}{0,32}=0,75$

4. Puisque $p(M)=0,32$, on a

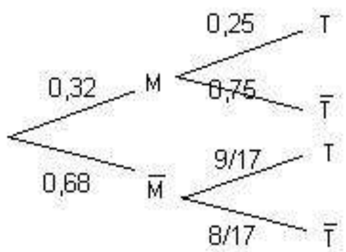
   $P(\overline{M})=1-0,32=0,68$.

   Puisque $p_M(T)$=0,75, on a $p_M(\overline{T})$=1-0,75=0,25

   On calcule de la même manière qu'à la question 3), $p_{\overline{M}}(T)=\frac{p(T\cap\overline{M})}{p(\overline{M})}=\frac{0,6\times0,6}{0,68}=\frac{9}{17}$,

   donc $p_{\overline{M}}(\overline{T})=1-\frac{9}{17}=\frac{8}{17}$.

   On peut donc « inverser » l'arbre de probabilité :



Exercice12

Notons Ω l'ensemble des résultats possibles du jet de dé. On a donc *Card* (Ω)=6.

Notons u_1 l'événement :

« Le tirage s'effectue dans l'urne u_1 » et

u_2 l'événement « Le tirage s'effectue dans l'urn

Notons B l'événement « obtenir une boule blanche »

La répartition des boules blanches et noires données dans l'énoncé nous fournit

les probabilités : $p_{u_1}(B)=\dfrac{3}{4}$ donc $p_{u_1}(\overline{B})=\dfrac{1}{4}$, ainsi

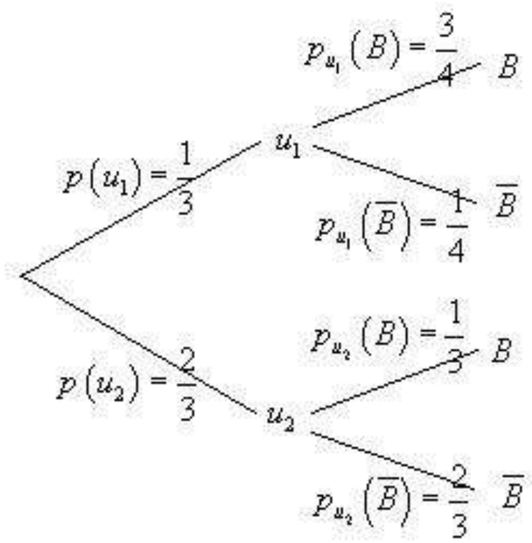
que $p_{u_2}(B)=\dfrac{1}{3}$ et

$p_{u_2}(\overline{B})=\dfrac{2}{3}$

Enfin, puisqu'il y a équiprobabilité dans les résultats du

lancer de dé, $p(u_1)=\dfrac{1}{3}$ et $p(u_2)=\dfrac{2}{3}$.

On peut résumer cette situation par l'arbre de probabilités ci-contre :



1. En appliquant la formule des probabilités totales,

   $p(B)=p(u_1\cap B)+p(u_2\cap B)$

   $=p(u_1)\times p_{u_1}(B)+p(u_2)\times p_{u_2}(B)=\dfrac{17}{36}$

2. On demande $p_B(u_1)$. Puisque $p(B)\neq 0$, on peut appliquer la formule de définition de la probabilité conditionnelle de l'événement u_1 conditionné par B :

   $$p_B(u_1)=\frac{p(B\cap u_1)}{p(B)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}{\frac{17}{36}}=\frac{9}{17}$$

Exercice13

Notons V l'événement « être vacciné » et M l'événement « être malade »

L'énoncé fournit $p(V)=\dfrac{1}{4}$ donc $p(\overline{V})=\dfrac{3}{4}$.

De plus $p_M(\overline{V})=4\times p_M(V)$.

Puisque $p_M(\overline{V})+p_M(V)=1$, on déduit $p_M(V)=\dfrac{1}{5}$ et

$p_M(\overline{V})=\dfrac{4}{5}$.

Enfin l'énoncé indique que $p_V(M)=\dfrac{1}{12}$ donc

$p_V(\overline{M})=\dfrac{11}{12}$.

a) La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(V;\overline{V})$, permet de calculer :

$$p(M)=p(V\cap M)+p(M\cap\overline{V})$$
$$=p(V)\times p_V(M)+p(\overline{V})\times p_{\overline{V}}(M)$$
$$p_{\overline{V}}(M)=\frac{p(M\cap\overline{V})}{p(\overline{v})}=\frac{p(M)\times p_M(\overline{V})}{\frac{3}{4}}$$
$$=\frac{p(M)\times\frac{4}{5}}{\frac{3}{4}}=p(M)\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{16}{15}p(M)$$

Puisque

$$p_{\overline{V}}(M)=\frac{p(M\cap\overline{V})}{p(\overline{v})}=\frac{p(M)\times p_M(\overline{V})}{\frac{3}{4}}$$

$=\dfrac{p(M)\times\frac{4}{5}}{\frac{3}{4}}=p(M)\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{16}{15}p(M)$, on se retrouve avec l'équation :

$$p(M)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{12}+\frac{3}{4}\times\frac{16}{15}p(M)$$
$$\Leftrightarrow p(M)-\frac{12}{15}p(M)=\frac{1}{48}\Leftrightarrow p(M)=\frac{5}{48}$$

b) Du coup, on calcule

$$p_{\overline{V}}(M)=\frac{16}{15}p(M)=\frac{16}{15}\times\frac{5}{48}=\frac{1}{9}$$

c) D'après les calculs précédents, en moyenne, 1 individu sur 9 non vaccinés tombe malade, Contre 1 individu sur 12 vaccinés. Le vaccin est assez peu efficace.

On s'attend à ce que le vaccin soit efficace, c'est-à-dire qu'il ait une action sur la maladie.

La probabilité d'être malade quand on est vacciné est censée être inférieure à la probabilité d'être malade quand on n’est pas vacciné. Même très inférieurs

Le quotient [Probabilité qu'un individu soit malade sachant qu'il n'est pas vacciné] / [Probabilité qu'un individu soit malade sachant qu'il a été vacciné] est donc censé être significativement supérieur à 1.