Lycée pilote de Tunis	PROBABILITÉS CONDITIONNELLES	Terminales maths & S-exp
Mr Ben Regaya. A	* ÉLÉMENTS DE CORRECTIONS	www.ben-regaya.net

Exercice1

Pour entretenir en bon état de fonctionnement ses installations de chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements pendant l'été.

On sait que 20 % des chaudières sont sous garantie.

Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{100}$.

Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{10}$.

On appelle G l'événement : « la chaudière est sous garantie » ;
on appelle D l'événement : « la chaudière est défectueuse ».

1. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   A : « la chaudière est garantie et est défectueuse » ;
   B : « la chaudière est défectueuse ».
2. Dans un logement la chaudière est défectueuse. Montrer que la probabilité qu'elle soit sous garantie est de $\frac{1}{41}$.

Exercice2

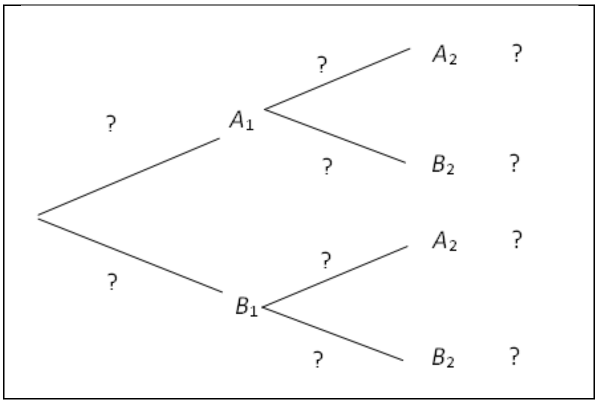
Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.

Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B.

Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le film A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.

Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe. On considère les évènements suivants :

A_1 « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;
A_2 « la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi » ;
B_1 « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;
B_2 « la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ».



a) Calculer les probabilités suivantes : $p(A_1)$ et $p(A_2)$.

b) Calculer les probabilités de chacun des évènements suivants : $p(A_2/A_1)$, $p(A_2/B_1)$ et $p(A_1 \cap A_2)$.

c) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante.

d) Retrouver à partir de l'arbre pondéré que $p(A_2) = \frac{8}{11}$.

Exercice3

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par a et b. 2 % des montres fabriquées présentent le défaut a et 10 % le défaut b.

Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les évènements suivants :

A : « la montre tirée présente le défaut a » ;
B : « la montre tirée présente le défaut b » ;
C : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;
D : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».

On suppose que les évènements A et B sont indépendants.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,882.
2. Calculer la probabilité de l'évènement D.

3. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres. On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.

   Calculer la probabilité de l'évènement E : « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ».

Exercice4

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :
Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs.
Chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.
On choisit un individu au hasard.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité
   a) qu'il soit malade et qu'il ait un test positif ?
   b) qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ?
   c) qu'il ait un test positif ?
   d) qu'il ait un test négatif ?
3. Calculer la probabilité
   a) qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif ?
   b) qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ?
4. Interpréter les résultats obtenus aux questions 3. a) et 3. b)

Exercice5

On fabrique à la chaîne un composant électronique; le procédé utilisé donne une proportion de d composants défectueux.

On fait donc un test des composants à la sortie de la chaîne.

Si un composant est bon, il est accepté avec une probabilité de 0,98.

Si un composant est défectueux, il est refusé avec une probabilité de r.

Soit A l'événement « le composant est accepté », et soit D l'événement « le composant est défectueux ».

1. Déterminer la probabilité de A.
2. Déterminer la probabilité de D sachant A.
3. r étant imposé par le procédé de vérification employé, quelle inégalité doit vérifier d si on veut que dans le lot accepté il y ait, en moyenne, au plus 5% de composant défectueux ?

Exercice6 (NC)

Dans un certain pays, l'âge à partir duquel on peut prendre sa retraite est de 60 ans. Pour bénéficier d'une pension de retraite à taux plein, il faut avoir cotisé pendant 43 ans. Une étude statistique a permis d'obtenir les informations suivantes :

- La proportion des retraités bénéficiant d'une pension de retraite à taux plein parmi ceux ayant pris leur retraite à 60 ans est de 30%.
- La proportion des retraités bénéficiant d'une retraite incomplète parmi ceux n'ayant pas pris leur retraite à 60 ans est de 40%.
- 20% des retraités ont pris leur retraite à 60 ans.

On interroge au hasard un retraité. On désigne par S l'événement « le retraité a pris sa retraite à 60 ans» et par T l'événement «la pension du retraité est à taux plein».

1. Ecrire en termes de probabilités les informations de l'énoncé.
2. Construire un arbre pondéré représentant cette situation.
3. En utilisant cet arbre, montrer que $p\,(T) = 0,54$.
4. En déduire la probabilité qu'un retraité ait pris sa retraite à 60 ans sachant que sa pension est à taux plein (On donnera la valeur arrondie à 10^{-3})
5. On interroge au hasard, de façon indépendante, trois retraités. Calculer la probabilité pour que deux d'entre eux aient leur pension de retraite à taux plein (On donnera la valeur arrondie à 10^{-3}).

Lycée pilote de Tunis	PROBABILITÉS CONDITIONNELLES	Terminales maths & S-exp
Mr Ben Regaya. A	ÉLÉMENTS DE CORRECTIONS	www.ben-regaya.net

Exercice1

1. Le texte donne $p(\mathrm{G})=0,2$, $p_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})=0,01$ et $p_{\bar{\mathrm{G}}}(\mathrm{D})=0,1$.

$p(\mathrm{A})=p(\mathrm{G}\cap\mathrm{D})=p(\mathrm{G})\times p_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})=0,2\times 0,01=0,002$;

$p(\mathrm{D})=p(\mathrm{G}\cap\mathrm{D})+p(\bar{\mathrm{G}}\cap\mathrm{D})=p(\mathrm{G})\times p_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})+p(\bar{\mathrm{G}})\times p_{\bar{\mathrm{G}}}(\mathrm{D})=0,002+0,8\times 0,1=0,082$.

2. On cherche $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{G})=\dfrac{p(\mathrm{D}\cap\mathrm{G})}{p(\mathrm{D})}=\dfrac{0,002}{0,082}=\dfrac{2}{82}=\dfrac{1}{41}$.

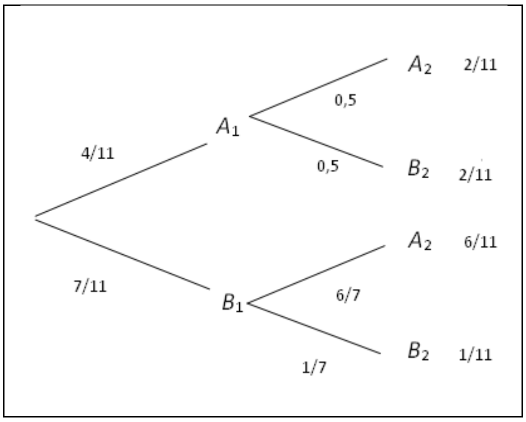
Exercice2

	A	B	Total
Samedi 1	8	14	22
Samedi 2	4 (A)+12 (B)	2 (B) +4 (A)	22
Total	24	20	44

a) $p(A_1)=\dfrac{8}{22}=\dfrac{4}{11}$; $p(A_2)=\dfrac{16}{22}=\dfrac{8}{11}$.

b) $p(A_2/A_1)=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$, $p(A_2/B_1)=\dfrac{12}{14}=\dfrac{6}{7}$, $p(A_1\cap A_2)=p(A_1)p(A_2/A_1)=\dfrac{4}{11}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{11}$.

c)



d) $p(A_2)=p(A_1\cap A_2)+p(B_1\cap A_2)=\dfrac{2}{11}+\dfrac{6}{11}=\dfrac{8}{11}$.

Exercice3

1. Comme A et B sont indépendants on a $p(A\cap B)=p(A)p(B)=0,02\times 0,1$; on en déduit donc que $p(\mathrm{C})=1-p(A\cup B)=1-\left[p(A)+p(B)-p(A\cap B)\right]=1-0,02-0,1+(0,02\times 0,1)=0,882$.
2. Il y a $0,02-0,002=0,018$ chances de tomber sur une montre n'ayant que le défaut a ; de même il y a

   $0,1-0,002=0,098$ chances de tomber sur une montre n'ayant que le défaut b ; on a donc

   $p(D)=0,018+0,098=0,116$
3. $p(E)=p(4)+p(5)=\dfrac{5!}{4!}(0,882)^4\,0,118^1+0,882^5\approx 0,891$.

Exercice4

1. Voir ci-dessous.

2. On note M l'individu est malade et T le test est positif :

a) $P(M\cap T)=0,03\times0,95=0,0285$ (pour bien faire il faudrait rédiger en utilisant les probabilités conditionnelles, mais l'arbre est ici bien suffisant).

b) $P(\overline{M}\cap\overline{T})=0,97\times0,99=0,9603$.

c) $P(T)=P(\overline{M}\cap T)+P(M\cap T)=0,0097+0,0285=0,0382$.

d) $P(\overline{T})=P(\overline{M}\cap\overline{T})+P(M\cap\overline{T})=0,0015+0,9603=0,9618$.

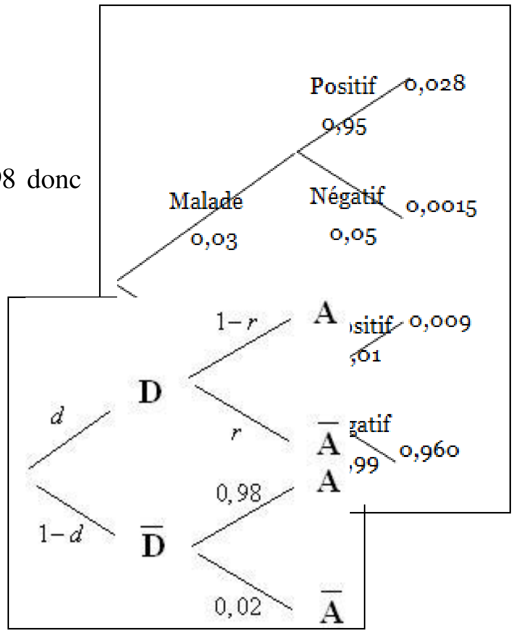
3. a) $P_T(\overline{M})=\dfrac{P(T\cap\overline{M})}{P(T)}=\dfrac{0,0097}{0,0382}\approx0,25$: c'est énorme…

b) $P_{\overline{T}}(M)=\dfrac{P(\overline{T}\cap M)}{P(\overline{T})}=\dfrac{0,9603}{0,9618}\approx0,998$: c'est mieux.

Exercice5

L'énoncé nous informe que $p(D)=d$ donc $p(D)=1-d$, puis $p_{\overline{D}}(A)=0,98$ donc $p_{\overline{D}}(\overline{A})=0,02$

et $p_D(\overline{A})=r$ donc $p_D(A)=1-r$.



On peut résumer cette situation par l'arbre de probabilité suivant :

1. Le système $(D\cap A\ ;\ D\cap A)$ constitue une partition de l'événement A.

   La formule des probabilités totales nous permet donc d'écrire que :

   $p(A)=p(D\cap A)+p(\overline{D}\cap A)=d(1-r)+(1-d)\times0,98$

2. On calcule

   $$p_A(D)=\frac{p(D\cap A)}{p(A)}=\frac{d(1-r)}{d(1-r)+(1-d)\times0,98}=\frac{d(1-r)}{0,02d-dr}+0,98$$

3. On cherche à déterminer une inégalité que doit vérifier d pour que $p_A(D)\leq0,05$

$$p_A(D)\leq0,05\Leftrightarrow\frac{d(1-r)}{0,02d-dr+0,98}\leq0,05\Leftrightarrow d(1-r)\leq0,05\left(0,02d-dr+0,98\right)\Leftrightarrow$$

$$d\leq\frac{0,049}{0,9999-0,95r}\Leftrightarrow d\leq\frac{490}{9999-9500r}$$